

# ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 082

Titolo nota

11/01/2011

## FORMA ESPONENZIALE

La forma esponenziale è un riciclaggio della forma trigonometrica

$$z = \rho e^{i\theta}$$

dove  $\rho$  e  $\theta$  sono gli stessi della forma trigonometrica

Vantaggio: la regola per il prodotto segue dalle regole formali per il prodotto di esponenziali

$$z = \rho e^{i\theta} \quad w = r e^{i\varphi} \quad z \cdot w = \rho r e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$$

Procedendo formalmente si ricottiene che il prodotto equivale a moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti.

Per la divisione è lo stesso

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho e^{i\theta}}{r e^{i\varphi}} = \frac{\rho}{r} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\varphi)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

La forma esponenziale, così come quella trigonometrica, è comoda per fare prodotti, quozienti, coniugati, potenze, radici.

Potenza n-esima di un numero complesso  $z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$z = (a+bi) \quad z^n = (a+bi)^n = \text{binomio di Newton} \dots$$

Questo se lavoro con la forma cartesianiana...

In forma trigonometrica  $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z \cdot z = (\text{moltiplico i } \rho, \text{ sommo i } \theta) = \rho^2 (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = \rho^3 (\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$$

In generale

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Formula per  
potenza  
 $n$ -esima

Ufficialmente si dimostra per induzione su  $n$  (farlo come esercizio sull'induzione:  $z^{n+1} = z \cdot z^n = \dots$ )

Stessa cosa in forma esponenziale:  $z = \rho e^{i\theta}$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Osservazione Prendo  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  (quindi  $\rho = 1$ )

Calcolo  $z^2$  in 2 modi diversi

1° modo: uso la formula

$$z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

2° modo: faccio il quadrato

$$\begin{aligned} z^2 &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + i^2 \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Le 2 scritture sono uguali perché  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$   
 $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$

Provo la stessa cosa con il cubo

1° modo:  $z^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$

2° modo: faccio il cubo  $z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3$

$$\begin{aligned} &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta + 3 \cos \theta \cdot i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \underbrace{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta}_{\cos(3\theta)} + i \underbrace{(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}_{\sin(3\theta)} \end{aligned}$$

### Esercizio 1 Calcolare $i^{20}$

Le potenze di  $i$  si ripetono con periodo 4. Quindi  $i^{20}$  è come fare  $i^4 = 1$ .

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = -1$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$

$$i^7 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

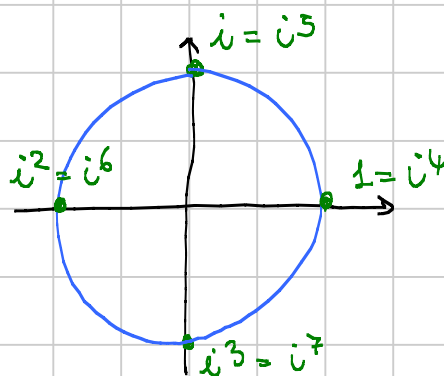
$$i^8 = 1$$

$$i^5 = i \cdot i^4 = i$$

$$i^9 = i$$

Geometricamente:

il modulo resta sempre 1, l'argomento cresce di  $90^\circ$  ad ogni potenza, quindi dopo 4 passaggi si ripete.



$$i^{2011} = i^3 \cdot \underbrace{i^{2008}} = i^3 = -i$$

= 1 perché l'esponente è multiplo di 4

Come si scrive  $i$  in forma esponenziale  $\rho = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$i = \rho e^{i\theta} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad i^{20} = e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 20} = e^{i \cdot 10\pi}$$

Un angolo di  $10\pi$  è equivalente ad un angolo di 0, quindi

$$e^{i \cdot 10\pi} = e^{i \cdot 0} = 1.$$

Esercizio 2 Scrivere i numeri complessi 3 e -5 in forma esp.

$$3 = 3 \cdot e^{0i} = 3 \cdot e^{2\pi i} = 3 e^{-200\pi i}$$

$\uparrow$   
 $\rho = 3, \theta = 0$

$\uparrow$   
angolo di 0 e  
angolo di  $2\pi$  sono  
equivalenti

$$-5 = 5 \cdot e^{\pi i} = 5 \cdot e^{-\pi i}. \quad \text{Nota bene } \overline{5 \cdot e^{\pi i}} = 5 \cdot e^{-\pi i}$$

$\uparrow$   
 $\rho = 5, \theta = \pi$

Esercizio 3  $z = \bar{z} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{asse } x$

#### Esercizio 4 $(1+i)^{20}$ Passo in forma esponenziale

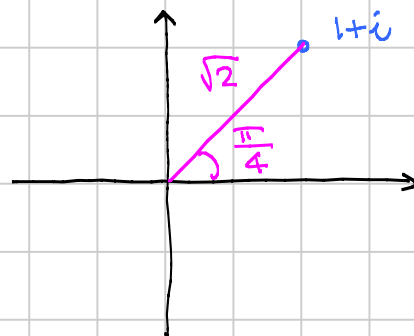
$$1+i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$(1+i)^{20} = \left[ \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \right]^{20}$$

$$= (\sqrt{2})^{20} e^{5\pi i}$$

$$= 2^{10} \cdot e^{5\pi i}$$

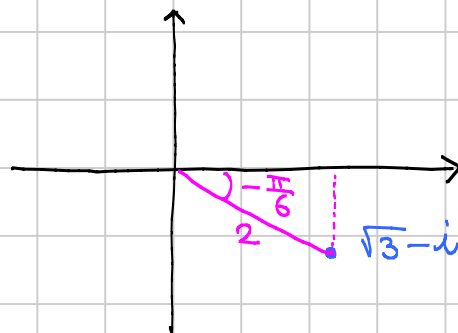
$$= 2^{10} \cdot e^{\pi i} = -2^{10} = -1024$$



#### Esercizio 5 $(\sqrt{3}-i)^{-20}$

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

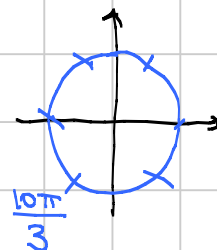


$$\sqrt{3}-i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$
$$\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\sqrt{3}-i = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

elevo alla -20:

$$(\sqrt{3}-i)^{-20} = 2^{-20} \cdot e^{+\frac{\pi}{6} \cdot 20 i} = \frac{1}{2^{20}} \cdot e^{\frac{10}{3}\pi i}$$



In alternativa  $\frac{10\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$

$$(\sqrt{3}-i)^{-20} = \frac{1}{2^{20}} e^{\frac{4}{3}\pi i} = \frac{1}{2^{20}} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{20}} \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= -\frac{1}{2^{21}} (1 + \sqrt{3}i)$$