

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 081

Titolo nota

11/01/2011

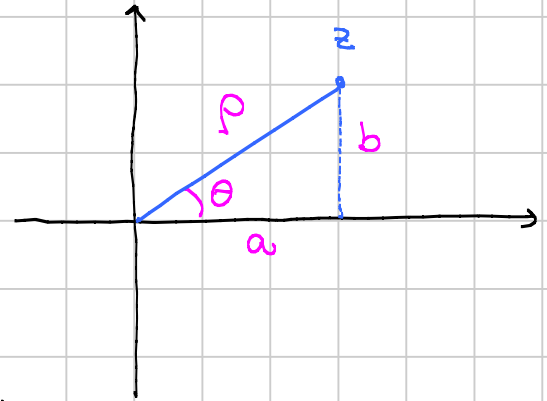
FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

= coordinate polari nel piano
= individuare un p.to del piano
mediante le coordinate ρ, θ
dove

ρ = distanza dall'origine (quindi $\rho \geq 0$)

θ = angolo formato con il semiasse positivo
delle x , misurato in senso antiorario

(quindi θ è un angolo, definito a meno di multipli di 2π)



Formule di passaggio Note le polari, trovare le cartesiane

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

Note le cartesiane, trovare le polari

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

θ = guardare il disegno !!!

Achtung! Divido tra di loro le formule per a e b . Ottengo

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

da cui

$$\theta = \arctan \frac{b}{a}$$

La formula è pericolosa per 2 motivi

- se $a = 0$ ci sono problemi
- $\arctan$ fornisce solo valori nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, che corrisponde al I e IV quadrante. Quindi la formula NON può funzionare nel II e III quadrante. In questi 2 quadranti occorre aggiungere π al risultato.

Scrivere un numero complesso in forma trigonometrica vuol dire scriverlo in funzione di ρ e θ

$$z = a + bi = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i = \boxed{\rho (\cos \theta + i \sin \theta)}$$

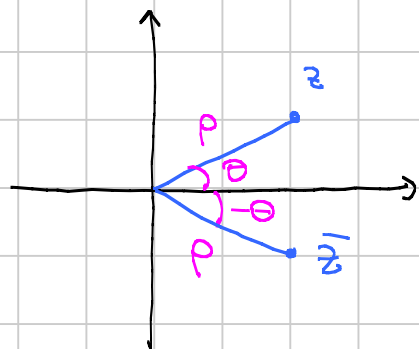
Operazioni semplici in forma trigonometrica

$$\operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta$$

$$\operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

$$|z| = \rho$$

Coniugato: stesso ρ
 θ cambiato di segno



$$\bar{z} = \rho \cos \theta - i \rho \sin \theta$$

$$= \rho \cos(-\theta) + i \rho \sin(-\theta)$$

$$= \rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

Prodotto in forma trigonometrica

$$z = a + bi = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$w = c + di = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$= \underbrace{\rho r \cos \theta \cos \varphi}_{ac} - \underbrace{\rho r \sin \theta \sin \varphi}_{bd} + (\underbrace{\rho r \sin \theta \cos \varphi}_{bc} + \underbrace{\rho r \cos \theta \sin \varphi}_{ad})i$$

$$= \rho r \{ (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + (\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)i \}$$

$$= \rho r \{ \cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta + \varphi)i \}$$

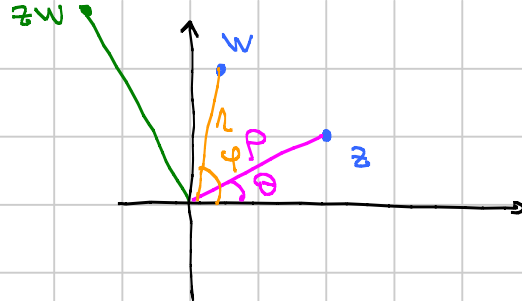
Quindi moltiplicare 2 numeri complessi in forma trigonometrica vuol dire

- moltiplicare i moduli
- sommare gli angoli (l'angolo si chiama anche "argomento di z ").

Geometricamente:

Il modulo di zw è il prodotto dei moduli

L'argomento di $z \cdot w$ è la somma degli argomenti.



Reciproco

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}{\rho^2}$$
$$= \frac{1}{\rho} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

In forma trigonometrica fare il reciproco vuol dire

- fare il reciproco del modulo
- cambiare il segno all'angolo

Divisione : $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ $w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{\rho}{r} (\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi))$$

Quindi in forma trigonometrica dividere 2 numeri complessi equivale a

- dividere i moduli
- sottrarre gli argomenti.

— o — o —

Esercizio (proprietà del coniugato)

① $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$$z = a+bi \quad w = c+di \quad z+w = (a+c) + (b+d)i$$

$$\overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i$$

D'altra parte

$$\bar{z} = a-bi \quad \bar{w} = c-di \quad \bar{z} + \bar{w} = (a+c) - (b+d)i$$

ed è venuto uguale al precedente

② $\overline{\overline{z}} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$
 $z = a+bi$ $\overline{z} = a-bi$ $\overline{\overline{z}} = a+bi$

③ $|\overline{z}| = |z|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$
 $z = a+bi$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
 $\overline{z} = a-bi$ $|\overline{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

④ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

Formula: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \overline{z}$, quindi $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{|z|^2} \overline{\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$

D'altra parte $\frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2}$ (altro modo di dire che $z\overline{z} = |z|^2$)

⑤ $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

1° modo: è banale in forma trigonometrica

2° modo: $|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}$
 $\uparrow$
 coniugato prodotto =
 prodotto coniugati
 $= z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}$
 $= |z|^2 \cdot |w|^2$

Così ho dimostrato che $|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$. Facendo la radice (e posso perché è tutto ≥ 0) ottengo la tesi.

3° modo $z = a+bi$ $w = c+di$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $|w| = \sqrt{c^2+d^2}$
 $z \cdot w = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$$|z \cdot w| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

Basta togliere le radici e fare i quadrati: fatto!
 (Verificare anche che $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$).