

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 080

Titolo nota

11/01/2011

NUMERI COMPLESSI Tre modi di presentarli:

- forma CARTESIANA
- forma TRIGONOMETRICA
- forma ESPONENZIALE

FORMA CARTESIANA $z \in \mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

$$z = x + yi$$

x e y sono numeri reali

i = unità immaginaria = oggetto tale che $i^2 = -1$

$$x = \text{parte reale di } z = \operatorname{Re}(z) = \mathcal{R}(z)$$

$$y = \text{parte immaginaria di } z = \operatorname{Im}(z) = \mathcal{I}(z)$$

Oss. Parte reale e parte immaginaria sono numeri reali.

Esempi

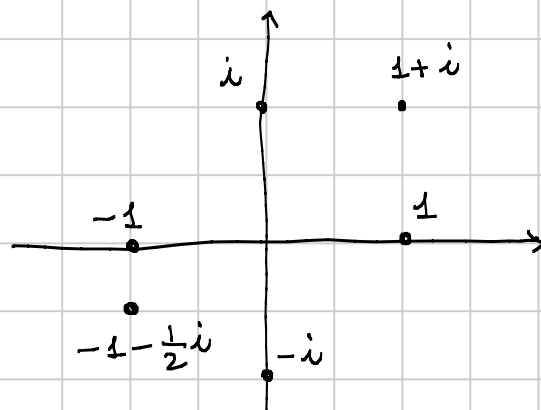
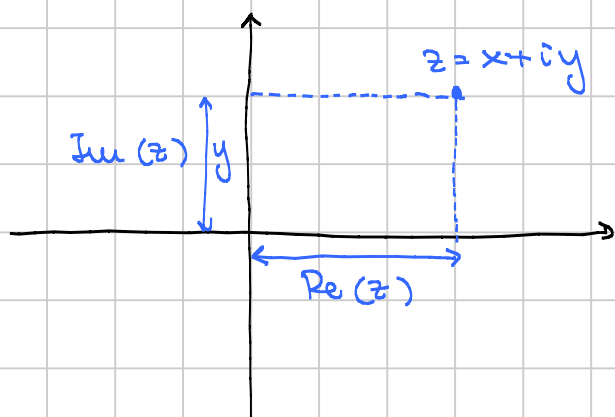
$$3 + 2i$$

$$-7 + \sqrt{2}i$$

$$e + \pi i$$

Rappresentazione di un numero complesso : PIANO DI GAUSS

Normalissimo piano cartesiano in cui identifico $z \in \mathbb{C}$ con il pto (x, y) del piano



Oss. I numeri reali sono in particolare numeri complessi e nel piano di Gauss sono tutti e soli quelli che stanno sull'asse x .

$$\rightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

$\rightarrow z \in \mathbb{C}$ si dice immaginario puro $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$
 $\Leftrightarrow$ nel piano di Gauss sta sull'asse y.

Operazioni algebriche tra numeri complessi

Somma e differenza

$$z = a + bi \in \mathbb{C}$$

$$w = c + di \in \mathbb{C}$$

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

In altri termini: $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ idem per la
 $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$ differenza

Prodotto: si moltiplicano applicando la proprietà distributiva

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bd \boxed{i^2} =^{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\operatorname{Re}(z \cdot w) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Im}(w)$$

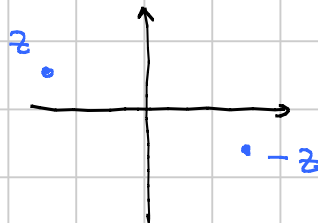
Oss. • L'equivalente di 0 in $\mathbb{C}$ è il numero complesso $0+0i=0$
 che nel piano di Gauss sta nell'origine.

$$z+0 = 0+z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\bullet \forall z \in \mathbb{C} \exists w \in \mathbb{C} \text{ t.c. } z+w=0$$

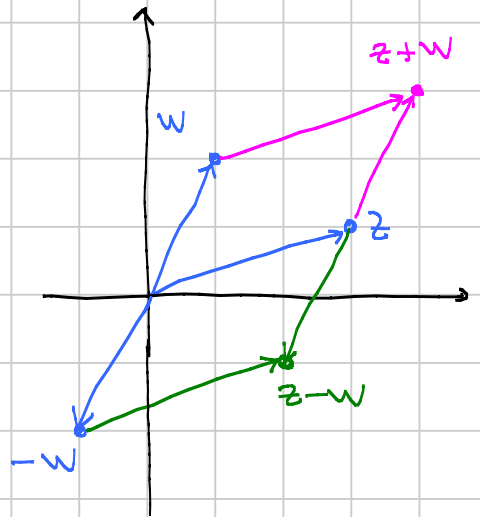
$$\text{Se } z = a+bi, \text{ allora } w = -a-bi = -z$$

Nel piano di Gauss z e $-z$ sono simmetrici rispetto all'origine



- Nel piano di Gauss la somma di 2 numeri complessi corrisponde alla regola del parallelogrammo.

Per la differenza basta pensarla come $z - w = z + (-w)$



- Per ora il prodotto non ha una interpretazione geometrica evidente.

Divisione $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$, quindi basta saper fare il reciproco.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad \text{"razionalizzo" moltiplicando sopra e sotto per } a-bi$$

$$= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a-bi}{a^2 + b^2}$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Oss. Il denominatore è $\neq 0$ se e solo se $a=b=0$, cioè se e solo se $z=0$.

Quindi riesco a calcolare $\frac{1}{z}$ se e solo se $z \neq 0$, quindi posso dividere per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

Verifica $z \cdot \frac{1}{z} = (a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

Esempio Calcolare $\frac{3+2i}{5-i}$ Razionalizzo moltiplicando per $5+i$

$$\frac{3+2i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

CONIUGATO

$z = a + bi$. Allora si definisce

$$\bar{z} = \text{conjugato di } z = a - bi$$

Nel piano di Gauss è il simmetrico rispetto all'asse x .

MODULO

Si definisce

$$|z| = \text{modulo di } z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

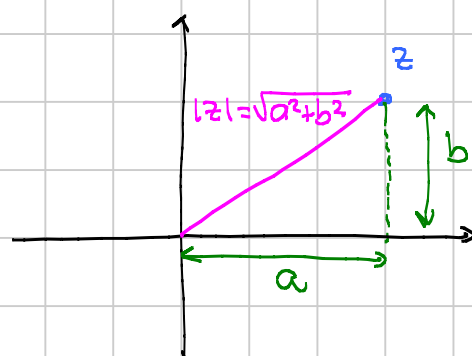
Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha che $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0$. Inoltre

$$|z| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Nel piano di Gauss, $|z|$ rappresenta la distanza di z dall'origine.

Reciproco, conjugato, modulo

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$



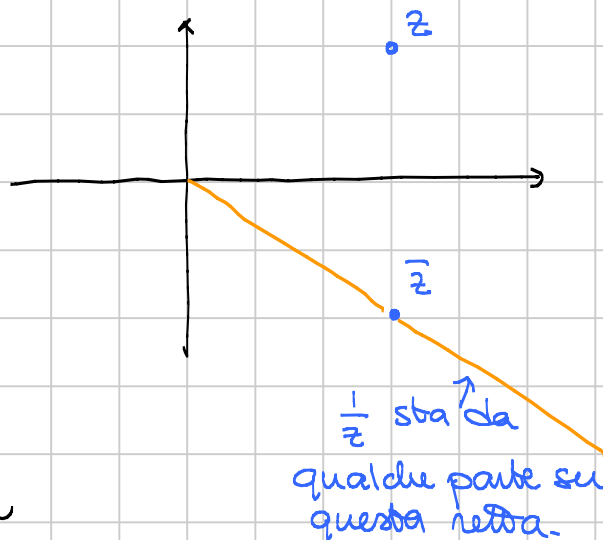
Quindi

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

e anche

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Geometricamente:



Oss.1 $\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i$

Quindi $\frac{1}{i} = -i$ (Verifica $i \cdot (-i) = -i^2 = 1$)

Oss.2 $\frac{1}{z} = \bar{z} \Leftrightarrow |z| = 1$

