

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 079

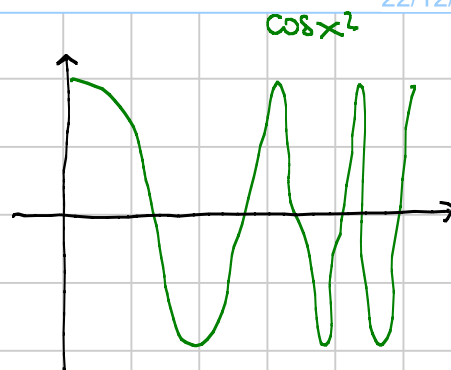
Titolo nota

22/12/2010

Trucco integrazione per parti

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \quad \text{è a segno variabile}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \cos(x^2) dx}_{\text{Numero}} + \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$$



Quindi basta studiare il secondo:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \cos(x^2) dx && \text{(moltiplico e divido per } 2x \text{ perché sono lontano da 0)} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{2x} \sin(x^2) \right]}_G \bigg|_1^A - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}_G \underbrace{\sin(x^2)}_F dx \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\frac{\sin 1}{2}}_{\text{Numero}} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin x^2}{x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx \end{aligned}$$

Grazie all' x^2 sotto posso dire che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x^2|}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx \text{ converge}$$

Ma allora $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge.

Allo stesso modo si tratta $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx$ e $\int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx$ purché $\alpha > 1$.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ se provo assoluta convergenza + confronto come sempre ottengo BOR

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_G + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Questo non ha problemi perché $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$, quindi

$0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ per ogni $x \in (0, 1]$, quindi è una funzione limitata !!!

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} \sin x dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^A}_G - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}_g \underbrace{(-\cos x)}_F dx \right)$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

$$= \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{converge perché c'è } x^2 \text{ sotto.}}$$

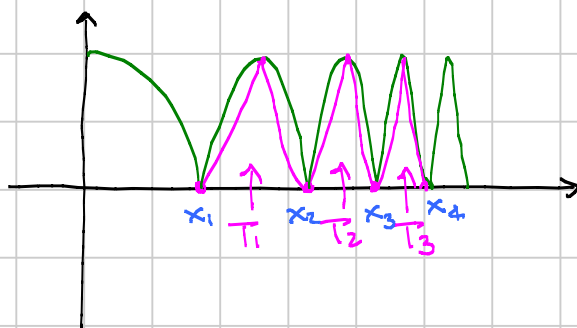
Back to esempio 1

$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge, ma la funzione integranda $\cos(x^2)$ non ha limite per $x \rightarrow +\infty$, in particolare non tende a zero.

Quindi anche per gli integrali impropri con problema a $+\infty$ **NON** c'è l'equivalente della condizione necessaria per la serie.

Metodo dei TRIANGOLINI

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$$



$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = \text{area sotto la funzione}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k)$$

Dove si annulla $\cos(x^2)$? Dove $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, quindi $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$

Base triangolo T_k ha lunghezza $x_{k+1} - x_k$

Altezza triangolo $T_k = 1$, quindi

$$\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right)$$

si razionalizza e si vede che diverge. Visto che la serie diverge, anche l'integrale diverge.

Esempio bon $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx = \int_1^{30} + \underbrace{\int_{30}^{+\infty}}_{\sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{converge}}$

Considero il primo:

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}_{\substack{\text{colpevole} \\ \text{diventa } \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ con problema a } 0 \Rightarrow \text{converge.}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \rightarrow \text{tranquillo}$$

BUON NATALE!