

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 077

Titolo nota

21/12/2010

Criteri per studio della convergenza $\int_E f(x) dx$: questa notazione riassume i 2 tipi di integrale improprio: E può essere un intervallo o una semiretta.

Criterio del confronto: supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$
Allora

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

Altre implicazioni non ce ne sono.

Osservazione La relazione $0 \leq f(x) \leq g(x)$ non serve che sia verificata per ogni $x \in E$, ma basta che sia verificata "in un intorno del problema".
— o — o —

Criterio del confronto asintotico. Supponiamo $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$
 $g(x) > 0 \quad \forall x \in E$

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \neq +\infty$$

dove x_0 è il punto in cui c'è il problema ($+\infty$ se l'integrale è su una semiretta, è uno degli estremi dell'intervallo nell'altro caso)

Allora

$$\int_E f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_E g(x) dx$$

hanno lo stesso tipo di comportamento.

Achtung! Si assume che entrambi siano mai problema ed abbiano il problema nello stesso x_0 .

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 6}{x} dx$

L'integranda ha segno costante.

Criterio del confronto:

$\frac{\sin x + 6}{x} \geq \frac{5}{x}$. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{5}{x} dx$ diverge, anche quello dato diverge.

↑
Num. ≥ 5

Esempio 2 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 6}{x\sqrt{x}} dx$

Ancora una volta ho integranda positiva e uso confronto.

$\frac{\sin x + 6}{x\sqrt{x}} \leq \frac{7}{x\sqrt{x}}$

L'integrale di $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ con problema a $+\infty$ converge (esponente $\frac{3}{2} > 1$), quindi l'integrale dato converge.

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{20x^3+5x+7} dx$

$f(x)$

Il denominatore è sempre > 7 , quindi non ci sono problemi di limitatezza. L'unico problema è $+\infty$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{10x^2}$ per x grandi.

Facciamo un confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{20x^3+5x+7} \cdot x^2 = \frac{1}{10} \neq 0 \neq +\infty$

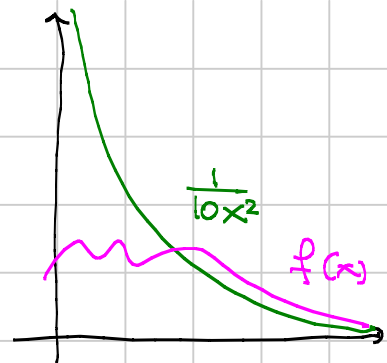
problema

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, quindi converge.

NO!!!!!! Bisogna fare il confronto asintotico solo tra integrali monoproblema!!! Avendo fatto il limite per $x \rightarrow +\infty$, ed essendo venuto $\neq 0$ e $\neq +\infty$, posso dedurre che

l'integrale improprio di $f(x)$ con unico problema a $+\infty$ si comporta come l'integrale improprio di $g(x)$ con unico problema a $+\infty$. Ora $\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge, quindi quello dato converge.

Interpretazione grafica: la $f(x)$ data si comporta come $\frac{1}{10x^2}$ per valori grandi di x .



L'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{10x^2} dx$ diverge per colpa del comportamento vicino a $x=0$, ma lì $f(x)$ e $\frac{1}{10x^2}$ non hanno nulla a che fare.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$ Ci sono 2 problemi: $x=0$ e $x=+\infty$, quindi spezzo

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

Considero $\int_1^{+\infty}$. Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x} + x^2} = 1$. L'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con unico problema a $+\infty$ converge, quindi l'integrale di $f(x)$ con unico problema a $+\infty$ converge.

Considero $\int_0^1 f(x) dx$. Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$, quindi converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} = 1$.
↑ problema

L'integrale di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ con unico problema a 0 converge, quindi l'integrale di $f(x)$ con unico problema in $x=0$ converge.

Quello globale converge perché somma di 2 pezzi convergenti.

Esempio 5 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ In $[0,1]$ $\sin x$ si annulla solo in 0

Brutale: $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$, quindi è come $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, cioè diverge.

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+3}} dx$ Integranda $f(x) \geq 0$
Unico problema a $+\infty$

Brutale: $f(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{3/2}}$ $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ converge.

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \dots$ convergenza.

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ Due problemi: $x=0$ e $x=+\infty$

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$: $f(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ converge

$\int_0^1 f(x) dx$: $f(x) \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow$ diverge. (Ho usato $\arctan x \sim 0$ per $x \rightarrow 0$)

Rigorosamente: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1 \neq 0 \neq +\infty \dots$$

Esempio 8 $\int_0^{+\infty} x^8 e^{-\sqrt{x}} dx$ $f(x) \geq 0$ sempre. Unico problema a $+\infty$

Tifo per l'esponenziale, e provo un confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{10} e^{-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{10 \log x - \sqrt{x}} \quad [e^{-\infty}] = 0$$

Caso limite di confronto asintotico

[se $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al problema, quindi

$f(x) \leq g(x)$ vicino al problema]

L'integrale di $g(x) = \frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$ converge, quindi l'integrale di $f(x)$ con problema a $+\infty$ converge.