

Studio della convergenza di integrali impropri senza passare attraverso primitiva + limite.

Integrandi a segno costante (positivo): Intanto i comportamenti possibili sono solo due (convergere o divergere a $+\infty$)

→ confronto

→ confronto asintotico (casi standard e casi limite)

→ tabellina di integrali impropri classici (per cui si conosce il comportamento) con cui confrontare

Integrandi a segno variabile:

→ assoluta integrabilità

→ trucco dell'integrazione per parti.

Integrali impropri classici

Esempio 1
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log A - \log 1] = +\infty \Rightarrow \text{diverge}$$

Esempio 2
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A$$

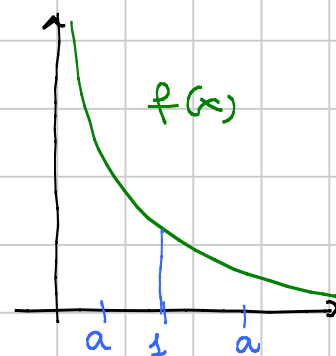
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{1}\right) = 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Esempio 3
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x}]_1^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\sqrt{A} - 2\sqrt{1}) = +\infty \Rightarrow \text{diverge}$$

Osservazione: se invece di usare 1 come estremo, usavo un qualunque $a > 0$, il tipo di comportamento non cambiava.
Può cambiare solo il valore a cui eventualmente converge

Infatti la differenza tra l'integrale in $[1, +\infty)$ e quello in $[a, +\infty)$ è l'integrale in $[1, a]$ oppure $[a, 1]$ e questo è un integrale proprio, cioè un numero,



Esempio 4

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-\alpha} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right]_1^A$$

vale se $\alpha \neq 1$, ma il caso $\alpha=1$ l'abbiamo fatto a parte

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{A^{1-\alpha}} - \frac{1}{1-\alpha} \right]$$

Quanto fa il limite? Dipende da α :

- se $\alpha > 1$, allora "A è al denominatore" e il limite è $\frac{1}{\alpha-1}$, quindi l'integrale improprio converge al valore positivo $\frac{1}{\alpha-1}$,
- se $\alpha < 1$, allora "A è al numeratore", quindi il limite è $+\infty$ (moltiplicato un coeff. positivo), quindi l'integrale diverge a $+\infty$
- se $\alpha = 1$, si fa come l'esempio 1 e diverge.

Conclusione

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx =$	$\nearrow$ converge a $\frac{1}{\alpha-1}$	se $\alpha > 1$
	$\searrow$ diverge a $+\infty$	se $\alpha \leq 1$

Comportamento dell'integrale improprio di $\frac{1}{x^\alpha}$ con unico problema a $+\infty$ (posso sostituire l'estremo $x=1$ con un qualunque $a > 0$)

Osservazione Con gli integrali siamo riusciti a dimostrarlo perché si sa bene la primitiva.

Esempio 5 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^3 x} dx$ (se partissi da $x=1$ avrei 2 problemi)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^3 x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \log^3 x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 x} \right]_2^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 A} + \frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 2} \right]$$

↑
sostituendo
 $y = \log x$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 2}, \text{ quindi converge.}$$

Esempio 6 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x \log x} dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log(\log x)]_2^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \log(\log A) - \log(\log 2)$$

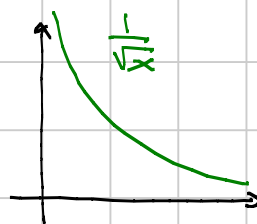
$$= +\infty, \text{ quindi diverge.}$$

Più in generale (esercizio)

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha x} dx$	↗ converge	se $\alpha > 1$
	↘ diverge	se $\alpha \leq 1$

Esempio 7 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2, \text{ quindi converge}$$



Esempio 8 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_\varepsilon^1 =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 1 - \log \varepsilon) = +\infty, \text{ quindi diverge.}$$

Esempio 9 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\varepsilon^1 =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right)$$

(caso $\alpha=1$ fatto
a mano)

Il limite dipende dal valore di α :

- se $\alpha > 1$, il termine con ε è al denominatore, quindi tende a $+\infty$ e ha davanti il coeff. $\frac{1}{\alpha-1}$ che è positivo, quindi diverge a $+\infty$;
- se $\alpha < 1$, il termine con ε è come fosse al numeratore, quindi tende a 0 e l'integrale converge a $\frac{1}{1-\alpha}$, che in questo caso è un numero positivo.

Tenendo conto del caso $\alpha=1$, abbiamo che

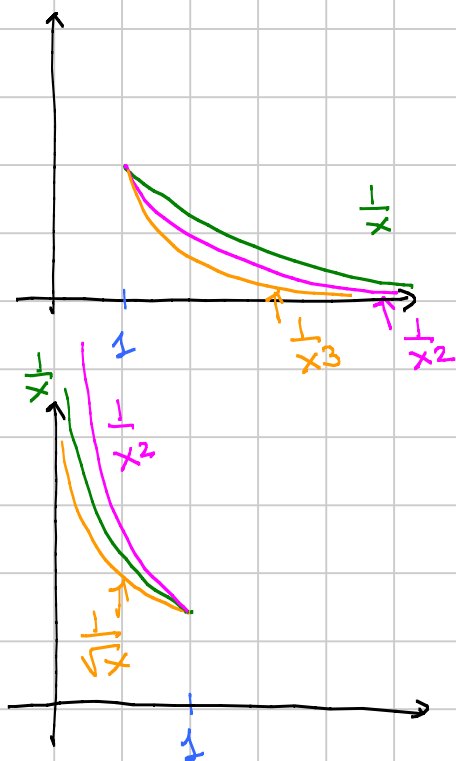
$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$	$\rightarrow$ converge a $\frac{1}{1-\alpha}$	se $\alpha < 1$
	$\rightarrow$ diverge a $+\infty$	se $\alpha \geq 1$

Integrale improprio di $\frac{1}{x^\alpha}$ con problema unico in $x=0$

Conseguenza: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: infatti ha sempre 2 problemi ed almeno uno dei 2 pesi diverge (nel caso $\alpha=1$ entrambi i pesi divergono).

— o — o —

Interpretazione geometrica



In $[1, +\infty)$ più l'esponente è grande, più la funzione è piccola, più è facile che l'integrale improprio converga.

In $[0, 1]$ le cose si scambiano: più l'esponente è grande e più la funzione è grande, quindi più è facile che l'integrale improprio diverga.