

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 075

Titolo nota

21/12/2010

INTEGRALI IMPROPRI

Integrali propri: $\rightarrow$ zona di integr. limitata
 $\rightarrow$ funzione integranda limitata

Se mancano una o entrambe le condizioni, l'integrale è improprio.

Esempi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

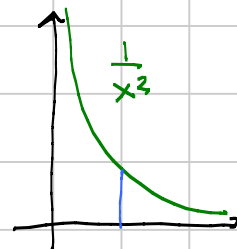
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

funzione limitata
 zona integr. non lim.

funzione non lim.
 zona integr. lim.

Manca
 tutto



INTEGRALI IMPROPRI MONOPROBLEMA

= un problema solo

Ce ne sono di 2 tipi.

$\rightarrow$ zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$
 funzione integranda limitata

$\rightarrow$ zona di integrazione = intervallo $[a, b]$, quindi limitata
 funzione integranda non limitata nell'intorno di uno dei due estremi (e altrove senza problemi).

Un integrale improprio con tanti problemi si spezza in tanti integrali impropri monoproblema.

Esempi

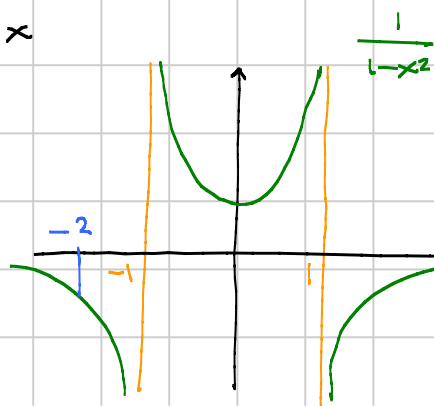
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^{12} \frac{1}{x^2} dx + \int_{12}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$\uparrow$ problema = funzione in $x=0$ $\uparrow$ problema = zona di integrazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{-15} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{-15}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

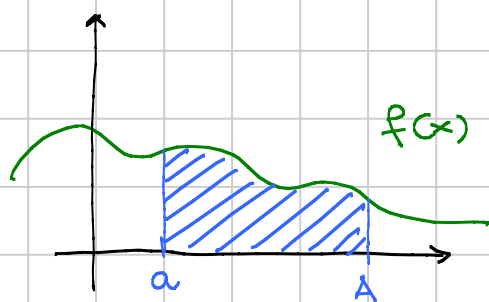
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

6 integrali monoproblema



Studio degli integrali monoproblema

Caso $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ con f limitata



$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty}$$

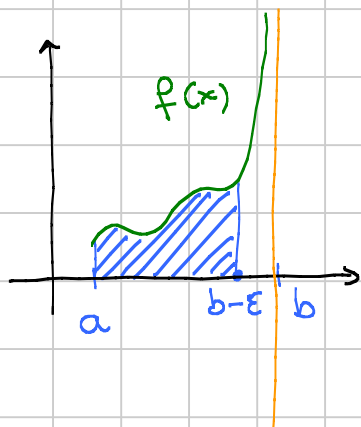
$$\int_a^A f(x) dx$$

essendo $f(x)$ limitata, questo è un integrale proprio.

Essendo un limite, ci sono 4 tipi di comportamento possibile

- convergere ad un numero $l \in \mathbb{R}$
- divergere a $+\infty$
- " " $-\infty$
- essere indeterminato.

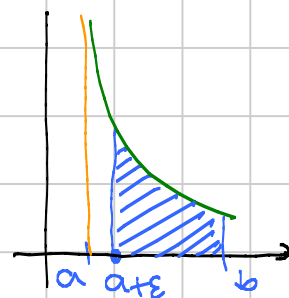
Caso $\int_a^b f(x) dx$. Supponiamo che il problema sia in $x=b$.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Se il problema è in $x=a$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$



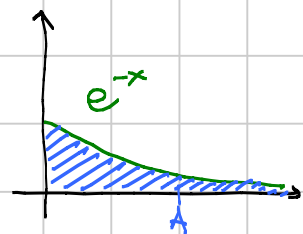
Ancora una volta i possibili comportamenti sono 4 (i soliti).

Se l'integrale ha tanti problemi, si procede così:

- si studiano i vari pezzi monoproblema in cui è stato scomposto
- si sommano i vari pezzi con le regole algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$, con l'accordo che se un pezzo diverge a $+\infty$ e un altro diverge a $-\infty$, allora quello generale si dichiara indeterminato.

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + e^0) = e^0 = 1$$

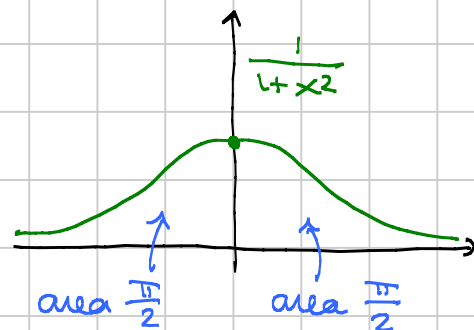


Esempio 2 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ lo spezzo in 2: $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

I 2 pezzi hanno lo stesso tipo di comportamento essendo l'integranda una funzione pari

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^A$$



$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan A - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

L'altro pezzo è uguale per simmetria, quindi tutto converge a π

Esempio 3 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$ Ci sono 2 problemi:
 $x=2$ e $x=+\infty$

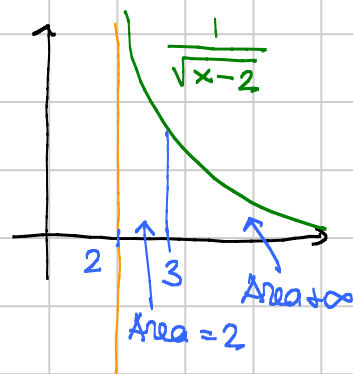
Quindi spezzo in $[2,3]$ e $[3,+\infty)$

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x-2}]_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{3-2} - 2\sqrt{2+\varepsilon-2})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x-2}]_3^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\sqrt{A-2} - 2) = +\infty$$



Un pezzo converge a 2, un pezzo diverge a $+\infty \Rightarrow$ il globale diverge a $+\infty$.