

Primitive di funzioni del tipo $\sqrt{\text{polinomio di 2° grado}}$

Esempio 1 $\int \sqrt{2+x^2} dx$

Pongo $\sqrt{2+x^2} = x+y$ Ricavo x

$$2 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2xy + y^2$$

Nella variabile x diventa di 1° grado, quindi si può ricavare senza fare radici

$$2xy = 2 - y^2, \quad x = \frac{2-y^2}{2y}$$

$$dx = \left[\frac{2-y^2}{2y} \right]' dy$$

$$= \int (x+y) \left[\frac{2-y^2}{2y} \right]' dy$$

$$= \int \left(\frac{2-y^2}{2y} + y \right) \left[\frac{2-y^2}{2y} \right]' dy$$

$$= \int \frac{2-y^2+2y^2}{2y} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2}{y} - y \right]' dy = \frac{1}{4} \int \frac{2+y^2}{y} \left[-\frac{2}{y^2} - 1 \right] dy$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2+y^2}{y} \frac{-2-y^2}{y^2} dy = -\frac{1}{4} \int \frac{(2+y^2)^2}{y^3} dy =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{4+4y^2+y^4}{y^3} dy = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{4}{y^3} + \frac{4}{y} + y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} - \log|y| - \frac{1}{8} y^2 \quad \text{Al posto di } y \text{ devo mettere } \sqrt{2+x^2} - x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{2+x^2}-x)^2} - \log|\sqrt{2+x^2}-x| - \frac{1}{8} (\sqrt{2+x^2}-x)^2$$

Esempio 2 $\int \sqrt{5x^2+6x+7} dx$

Pongo $\sqrt{5x^2+6x+7} = \sqrt{5}x+y$

Quando ricavo x ottengo

$$\cancel{5x^2} + 6x + 7 = \cancel{5x^2} + y^2 + 2\sqrt{5}xy$$

Nella variabile x è diventato di 1° grado, quindi si ricava.

Allo stesso modo si gestiscono integrali con $\sqrt{ax^2+bx+c}$ purché $a > 0$.

Esempio 3 $\int \sqrt{-x^2-4x+5} \, dx = \int \sqrt{-(x^2+4x-5)} \, dx$
 $= \int \sqrt{-(x+5)(x-1)} \, dx$

Scego uno a caso dei 2 fattori, ad esempio $(x+5)$ e pongo

$$\sqrt{-(x+5)(x-1)} = (x+5)y \quad \text{Quando ricavo } x \text{ ottengo}$$

$$-(x+5)(x-1) = (x+5)^2 y^2$$

Ancora una volta come equazione in x è di primo grado, quindi posso ricavare x senza fare radici quadrate

$$-x+1 = xy^2+5y^2$$

$$x(y^2+1) = 1-5y^2, \quad x = \frac{1-5y^2}{y^2+1}$$

quindi $dx = \left[\frac{1-5y^2}{y^2+1} \right]' dy$. Tornando all'integrale:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2-4x+5} \, dx &= \int (x+5)y \left[\frac{1-5y^2}{y^2+1} \right]' dy \\ &= \int \left(\frac{1-5y^2}{y^2+1} + 5 \right) y \left(\frac{1-5y^2}{y^2+1} \right)' dy \end{aligned}$$

e questo è razionale e si fa!!!
o o o

Questa tecnica funziona tutte le volte che posso scomporre il polinomio sotto radice, quindi tutte le volte che $\Delta > 0$.

Riassunto

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\lambda = \text{radice del polinomio}$
$a > 0$	$\sqrt{} = \sqrt{a}x+y$ $\sqrt{} = (x-\lambda)y$	$\sqrt{} = \sqrt{a}x+y$	
$a < 0$	$\sqrt{} = (x-\lambda)y$		$\leftarrow$ ho radice di un pol. di 2° grado che è sempre < 0 , quindi non è mai definita.

Esempio 4 $\int \sqrt{4-x^2} dx$

$$= \int (x-2) y \left(\frac{2y^2-2}{y^2+1} \right)' dy$$

$$= \int \left(\frac{2y^2-2}{y^2+1} - 2 \right) y ()' dy$$

$$\sqrt{4-x^2} = (x-2)y$$

$$\sqrt{-(x+2)(x-2)} = (x-2)y$$

$$-(x+2)(x-2) = (x-2)^2 y^2$$

$$-x-2 = xy^2 - 2y^2$$

$$x(y^2+1) = 2y^2-2$$

$$x = \frac{2y^2-2}{y^2+1}$$

$$= \int \frac{2y^2-2-2y^2-2}{y^2+1} y \left(\frac{2y^2-2}{y^2+1} \right)' dy = -8 \int \frac{y}{y^2+1} \frac{2y(y^2+1)-2y(y^2-1)}{(y^2+1)^2} dy$$

$$= -8 \int \frac{y \cdot 4y dy}{(y^2+1)^3} = -32 \int \frac{y^2}{(y^2+1)^3} dy$$

Impostazione: $\frac{y^2}{(y^2+1)^3} = \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{d}{dy} \frac{Cy^3+Dy^2+Ey+F}{(y^2+1)^2}$

con un po' di conti viene (Piurola!!!)

Alternativa: pongo $x = 2 \sin y$, da cui $dx = 2 \cos y dy$. Ottengo:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \int \sqrt{4-4\sin^2 y} \cdot \frac{2 \cos y dy}{dx} = 4 \int \cos^2 y dy$$

fatto in vari modi

$$= 4 \left(\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \sin y \cos y \right)$$

$$= 2y + 2 \sin y \sqrt{1-\sin^2 y} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + x \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$y = \arcsin \frac{x}{2}$

(confrontare con la risposta ottenuta al p.to precedente).

Esempio 5 $\int \sqrt{4+x^2} dx$

1° modo: $\sqrt{4+x^2} = x+y$ e trova

2° modo: $x = 2 \sinh y$, quindi

$$dx = 2 \cosh y dy$$

$$= \int \sqrt{4+4 \sinh^2 y} 2 \cosh y dy = 4 \int \cosh^2 y dy$$

Per integrare $\cos^2 y$ ci sono 3 modi (almeno)

→ usare formula per $\cos^2(2y)$

→ parti + grande ritorno

→ sostituire la formula con gli esponenziali e integrare !!!

(confrontare i risultati).

— o — o —

Se non funziona null'altro, provare le formule parametriche!

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{dove } t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{Ricavo } x: \frac{x}{2} = \arctan t, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\text{Esempio 6} \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\frac{1+t^2}{2t}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt$$

Formula
parametrica

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$\text{In alternativa: } \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x}$$

$$\stackrel{y = \cos x}{=} - \int \frac{dy}{1-y^2}$$

e da qui si conclude
(confrontare con risposta
precedente)

$$\text{Esempio 7} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

1° modo: formule parametriche

2° modo: viene $\tan x \dots$

(primitiva elementare !!!)

— o — o —