

Sostituzioni razionalizzanti: integrali di funzioni strane che si riducono a funzioni razionali con opportune sostituzioni.

Esempio 1  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$  Pongo  $y = e^x$ , quindi  $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y = \arctan e^x$$

Esempio 2  $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$  Pongo  $y = e^x$ , quindi  $dy = e^x dx$ : mi devo procurare  $e^x$  al numeratore

$$= \int \frac{1}{e^x} \frac{\boxed{e^x dx}}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{y} \frac{1}{1+y^2} dy \quad \text{è diventato razionale}$$

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2} = \frac{A+Ay^2+By^2+Cy}{y(1+y^2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (\text{coeff. } x^2) & A=1 & \frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2} \\ C=0 & (\text{coeff. } x) & B=-1 \\ A=1 & (\text{termine noto}) & C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{y} \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{dy}{y} - \int \frac{y}{1+y^2} dy = \log|y| - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Tornando in  $x$ :  $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \log|e^x| - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$   
 $= x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$

Metodo alternativo:  $y = e^{2x}$   $dy = 2e^{2x} dx$ : serve  $2e^{2x}$  al num.

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^{2x}} \frac{\boxed{2e^{2x} dx}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(y+1)}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} \quad \text{con conti o occhio} \dots = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

Quindi  $\int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{y+1} dy = \log|y| - \log|y+1|$   
 $= \log \left| \frac{y}{y+1} \right|$

Tornando in  $x$ :

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(y+1)} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \log e^{2x} - \frac{1}{2} \log (e^{2x}+1)$$

$$= x - \frac{1}{2} \log (e^{2x}+1)$$

Lo stesso metodo funziona per tutte le integrande del tipo  
 funzione razionale di  $e^x$  o di  $a^x$ .

Esercizio 3  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} dx$  Pongo  $y = \sqrt{x}$ , quindi  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$   
 quindi mi devo procurare  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{y^2+3}{y-2} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^3+3y}{y-2} dy$$

[In alternativa: pongo  $y = \sqrt{x}$ , quindi  $x = y^2$ , quindi  $dx = 2y dy$ , quindi  
 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} dx = \int \frac{y^2+3}{y-2} \cdot 2y dy$  e si ottiene lo stesso integrale]

Per integrare  $\frac{y^3+3y}{y-2}$  occorre fare la divisione

$$\begin{array}{r} y^3 + 3y \\ - y^3 + 2y^2 \\ \hline 2y^2 + 3y \\ - 2y^2 + 4y \\ \hline 7y \\ - 7y + 14 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} y-2 \\ \hline y^2+2y+7 \\ \hline \end{array}$$

Quoziente

14 Resto

Dalla divisione deduco che

$$y^3+3y = (y-2)(y^2+2y+7) + 14$$

Quoz.      resto

da cui

$$\frac{y^3+3y}{y-2} = y^2+2y+7 + \frac{14}{y-2}$$

$$\int \frac{y^3+3y}{y-2} dy = \int (y^2+2y+7) dy + \int \frac{14}{y-2} dy = \frac{y^3}{3} + y^2 + 7y + 14 \log|y-2|$$

Tornando nella variabile  $x$  si ha che

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} dx = 2 \int \frac{y^3+3y}{y-2} dy = \frac{2}{3} y^3 + 2y^2 + 14y + 28 \log |y-2|$$
$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2x + 14\sqrt{x} + 28 \log |\sqrt{x}-2|$$

Esempio 4  $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x}-2} dx$  Pongo  $y = \sqrt[3]{x}$ , quindi  $x = y^3$ ,  
quindi  $dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{y^3+3}{y-2} \boxed{3y^2 dy} \quad \text{da qui in poi è razionale}$$

Esempio 5  $\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}-2} dx$  Pongo  $y = \sqrt[6]{x}$  (in questo modo avrò  
che  $\sqrt{x} = y^3$  e  $\sqrt[3]{x} = y^2$ )  
quindi  $x = y^6$ , quindi  $dx = 6y^5 dy$

$$= \int \frac{y^3+3}{y^2-2} \cdot 6y^5 dy \quad \text{ed è diventato razionale.}$$

Esempio 6  $\int \sqrt{\frac{2x+3}{x-5}} dx$  Pongo  $y = \sqrt{\frac{2x+3}{x-5}}$  e ricavo  $x$

$$= \int y \left[ \frac{5y^2+3}{y^2-2} \right]' dy$$

$$y^2 = \frac{2x+3}{x-5}, \quad xy^2 - 5y^2 = 2x+3$$

$$x(y^2-2) = 5y^2+3, \quad x = \frac{5y^2+3}{y^2-2}$$

è diventato razionale e  
lo posso fare in 2 modi.

$$dx = \left[ \frac{5y^2+3}{y^2-2} \right]' dy$$

1° modo: calcolo la derivata e parto con l'algoritmo per le funzioni razionali.

2° modo: per parti!

$$\int \underbrace{y}_{G} \underbrace{\left[ \frac{5y^2+3}{y^2-2} \right]'}_F dy = \underbrace{y}_{G} \cdot \underbrace{\frac{5y^2+3}{y^2-2}}_F - \int \underbrace{1}_{G} \cdot \underbrace{\frac{5y^2+3}{y^2-2}}_F dy$$

e questo si fa facilmente.

Con questa tecnica si fanno tutti gli integrali che contengono

$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , anche tante radici con tanti k diversi (basta prendere il minimo comune multiplo tra gli indici delle varie radici)

La cosa importante è che l'argomento delle varie radici sia lo stesso.

$$\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}+1} dx \quad \text{Questo è un problema!!!!}$$

— o — o —

Esempio 7  $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x dx$   
 $= \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = \int (1 - y^2) dy$   
 $y = \sin x$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x)^2}$$

Pongo  $y = \sin x$   
 $dy = \cos x dx$

$$= \int \frac{dy}{(1 - y^2)^2} \quad \text{ed è razionale} \quad (1 - y^2)^2 = (1 + y)^2 (1 - y)^2$$

$$\frac{1}{(1 - y^2)^2} = \frac{A}{1 - y} + \frac{B}{1 + y} + \frac{d}{dy} \frac{Cy + D}{1 - y^2}$$

e da qui in poi sono facili conti.