

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 072

Titolo nota

18/12/2010

Integrazione funzioni razionali (parte 2)

Al termine del sistema lineare abbiamo scritto $\frac{P(x)}{Q(x)}$ come somma di addendi di 3 tipi:

• $\frac{d}{dx} \frac{\text{Mostro}_1}{\text{Mostro}_2}$. Questo si integra banalmente togliendo il $\frac{d}{dx}$

• $\frac{a}{bx+c}$ (provenivano dai fattori di 1° grado del denominatore)

$$\int \frac{a}{bx+c} dx = \frac{a}{b} \log|bx+c| \quad (\text{volendo posso } y=bx+c \text{ e vado per sostituzione})$$

• $\frac{dx+\beta}{ax^2+bx+c}$ con denominatore non ulteriormente scomponibile (cioè $b^2-4ac < 0$)

Volendo c'è una formulaccia, in funzione dei 5 parametri...

Vediamo di illustrarla in un po' di esempi.

Esempio 1 $\int \frac{2x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx$
 $= \log(x^2+1) + 3 \arctan x$

Esempio 2 $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \arctan(x+1)$
 $\uparrow$ volendo $y=x+1$

Esempio 3 $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2} dx$

Mi aspetto un po' di log per sistemare la x e arctan per sistemare il termine noto

$$\int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$$

Esempio 4 $\int \frac{5x-3}{x^2+4x+7} dx$

Denominatore: x^2+4x+7

Derivata denum: $2x+4$

Vedo di far saltar fuori un $2x$ al numeratore

$$\begin{aligned} \frac{5x-3}{x^2+4x+7} &= \frac{5}{2} \frac{2x - \frac{6}{5}}{x^2+4x+7} = \\ &= \frac{5}{2} \frac{2x+4 - \frac{6}{5} - 4}{x^2+4x+7} = \frac{5}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+7} - \frac{5}{2} \cdot \frac{26}{5} \frac{1}{x^2+4x+7} \\ &= \frac{5}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+7} - \frac{13}{x^2+4x+7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+4x+7} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7} dx - 13 \int \frac{1}{x^2+4x+7} dx \\ &= \frac{5}{2} \log(x^2+4x+7) - 13 \int \frac{1}{3+(x+2)^2} dx \\ &\quad \text{essendo } 4 < 0 \text{ il polinomio} \\ &\quad \text{è sempre } > 0 \\ &= \frac{5}{2} \log(x^2+4x+7) - 13 \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}} \\ &\quad \text{Formula per } \int \frac{1}{a+y^2} dy \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$

① Divisione: divido x^3 per x^2-1

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ -x^3 & +x \\ \hline & x \end{array}$$

Quindi $x^3 = x(x^2-1) + x$, quindi

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1) + x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}, \text{ quindi}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \log|x^2-1|$$

Più breve ancora: $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int \frac{x^3-x+x}{x^2-1} dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) dx = \dots$

Esempio 2 $\int \frac{dx}{x^2-1}$ Divisione non serve

② Fattorizzazione $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

③ Sistema lineare

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{x^2-1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (\text{coeff. } x) \\ -A+B=1 & (\text{termine noto}) \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -2A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$

④ Integrazione: $\int \frac{1}{x^2-1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1}$

$$= -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{1/2}$$

Osservazione Modo alternativo di risolvere il sistema lineare.

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad \text{Moltiplico tutto per } x+1:$$

$$\frac{1}{x-1} = A + \frac{B(x+1)}{x-1} \quad \text{Metto } x=-1$$

$$-\frac{1}{2} = A + 0$$

Moltiplico per $(x-1)$: $\frac{1}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B$ Metto $x=1$: $\frac{1}{2} = B$

Esempio 2 $\int \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$ ① Divisione non serve

② Fattorizzazione:

$$(x^2-4)^2 = (x+2)^2(x-2)^2$$

③ Sistema lineare

$$\frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2-4}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C(x^2-4) - 2x(Cx+D)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{A(x+2)(x-2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + Cx^2 - 4C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2-4)^2}$$

= ... conto.

Esempio 3 $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ ① e ② : banali
③ Sistema lineare

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A=0 & (\text{coeff. } x^3) & A=0 \\ B-C=0 & (\text{coeff. } x^2) & B=C=\frac{1}{2} \\ A-2D=0 & (\text{coeff. } x) & D=0 \\ B+C=1 & (\text{termine noto}) \end{cases}$$

Quindi $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$

Quindi $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$$

x aggiunta dopo video

[Verifica finale ...]