

Integrazione delle funzioni razionali

$$\text{Funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Si integra in 4 passaggi:

- divisione
- fattorizzazione
- sistema lineare
- integrazione

② **DIVISIONE** Se $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$, allora non c'è nulla da fare, e si passa alla fase successiva.
 Se $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$, allora faccio la divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$.
 Otengo una scrittura del tipo

$$P(x) = Q(x) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quoziente}}}{A(x)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{resto, con grado}(B(x)) < \text{grado}(Q(x))}}{B(x)}$$

Ma allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot A(x) + B(x)}{Q(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio,} \\ \text{che si integra}}}{A(x)} + \frac{B(x)}{Q(x)} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{nuova funz.} \\ \text{razionale, con} \\ \text{grado}(\text{Num}) < \text{grado}(\text{Denom.}) \end{array}$$

Conclusione prima fase: se si integrano le funzioni razionali con $\text{grado}(\text{Num.}) < \text{grado}(\text{Denom.})$, allora si integrano tutte.

Esempio

$$\frac{x^3}{x^2+2} = \frac{x^3+2x-2x}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2}$$

[2] FATTORIZZAZIONE Scrivere il denominatore come prodotto di polinomi di 1° e 2° grado, eventualmente con molteplicità.

Fatto generale (che rivedremo con i numeri complessi): ogni polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di polinomi di 1° e 2° grado a coeff. reali. Ovviamente i fattori di 1° grado corrispondono alle radici reali del polinomio. Si intende che i fattori di 2° grado non sono ulteriormente scomponibili ($\Delta < 0$)

Esempi

$$x^3 - x = x \underbrace{(x^2 - 1)}_{\downarrow \text{ulteriormente scomponibile}} = x(x+1)(x-1)$$

$$x^3 + x = x \underbrace{(x^2 + 1)}_{\downarrow \text{non ulteriormente scomponibile}}$$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$$

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x+1) \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\Delta < 0} (x-1) \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta < 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + x^2 &= x^2(x^2 - 2x + 1) = x^{\textcircled{2}}(x-1)^{\textcircled{2}} \\ &= x \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-1) \end{aligned}$$

molteplicità

$x^4 + 1$ non ha radici reali, quindi non ha fattori di 1° grado nella scomposizione. Per il fatto generale DEVE essere prodotto di 2 fattori di 2° grado.

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

$A^2 - B^2$
 $(A+B)(A-B)$

[3] SISTEMA LINEARE Scrivere la funzione razionale data (con grado (Num.) < grado (Den.)) come somma di frazioni che hanno come denominatore i singoli fattori del denominatore iniziale.

Esempio 1

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = \frac{2x+3}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

↑
fattorizz.

Ora A e B sono costanti da determinare.

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

per avere uguaglianza deve essere

$$\begin{cases} A+B=2 & \text{(coefficiente di } x) \\ 3A+2B=3 & \text{(termine noto)} \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ 3A+4-2A=3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=3 \\ A=-1 \end{cases}$$

Così abbiamo

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = -\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

In generale si procede così.

Caso semplice: tutti i fattori del denominatore hanno molteplicità 1.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{\text{1° grado}} + \frac{B}{\text{1° grado}} + \frac{C}{\text{1° grado}} + \frac{Dx+E}{\text{2° grado}} + \frac{Fx+G}{\text{2° grado}}$$

cioè → sopra i fattori di 1° grado c'è una costante incognita

→ sopra i fattori di 2° grado c'è un polinomio di 1° grado a coefficienti incogniti

Esempio 2

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x^3+2x} &= \frac{x^2+1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \\ &= \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{(coeff. } x^2) \\ C=0 & \text{(coeff. } x) \\ 2A=1 & \text{(termine noto)} \end{cases} \quad \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ C=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi

$$\frac{x^2+1}{x^3+2x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+2}$$

Consiglio: fare la verifica al termine della fase 3.

Caso generale: se ci sono molteplicità maggiori di 1.

$$\frac{\dots}{(x-1)(x-2)^3(x+5)^2(x^2+1)(2x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+5} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{2x^2+3} +$$

Fino qui come se non ci fossero molteplicità

$$+ \frac{d}{dx} \frac{Hx^6 + Ix^5 + Lx^4 + Mx^3 + Nx^2 + Ox + P}{\underbrace{(x-2)^2(x+5)(2x^2+3)^2}}$$

generico polinomio con grado minore di 1 rispetto al denominatore

↑ parte inutilizzata del denominatore

Osservazione: Quante sono le incognite? Tante quante il grado del denominatore iniziale

Quante sono le equazioni? Tante quanti i coeff. del numeratore iniziale, che però sono tanti quanto il grado del denom. iniziale.

Fatto generale: il sistema lineare che viene fuori dalla fase 3 ha sempre SOLUZIONE UNICA (e tante equazioni quante incognite).