

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 070

Titolo nota

16/12/2010

Esempio 1 $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$ $y = 1+x^2$
 $dy = 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log (1+x^2)$

Esempio 2 $\int \frac{x^3}{7+2x^4} dx$ $y = 7+2x^4$ $dy = 8x^3 dx$
 $= \frac{1}{8} \int \frac{1}{7+2x^4} \cdot 8x^3 dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{8} \log |y| = \frac{1}{8} \log (7+2x^4).$

Esempio 3 $\int \sqrt{7-5x} dx$ $y = 7-5x$ $dy = -5dx$
 $= -\frac{1}{5} \int \underbrace{\sqrt{7-5x}}_{\sqrt{y}} \underbrace{(-5)dx}_{dy} = -\frac{1}{5} \int \sqrt{y} dy = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} y^{3/2}$
 $= -\frac{2}{15} (7-5x)^{3/2}.$

Esempio 4 $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ Provo $y = 1+x^4$ e non va...
Provo $y = x^2$, quindi $dy = 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \arctan y = \frac{1}{2} \arctan x^2$

Esempio 5 $\int \frac{1}{1+2x^2} dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} dx$ Pongo $y = \sqrt{2}x$
 $dy = \sqrt{2} dx$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} \cdot \sqrt{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2} dy$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan (\sqrt{2}x).$

Più in generale $\int \frac{1}{1+ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan (\sqrt{a}x)$ per ogni $a > 0$.

Esempio 6 $\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2} dx = \text{quello precedente con } a = \frac{1}{2}, \text{ quindi}$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}} x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Più in generale $\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}$ per ogni $a > 0$.

Esempio 7 $\int \log^2 x dx$ 1 nascosto !!!

$$\begin{aligned}
 &= \int \underset{\substack{f \\ \neq}}{1} \cdot \underset{g}{\log^2 x} dx = x \cdot \underset{f}{\log^2 x} - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{2 \log x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} dx \\
 &= x \cdot \log^2 x - 2 \int \log x \\
 &= x \log^2 x - 2x (\log x - 1)
 \end{aligned}$$

Con la stessa tecnica si fa qualunque potenza del logaritmo.

Esempio 8 $\int \frac{1}{x \log^4 x} dx$ Pongo $y = \log x$; $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{\log^4 x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y^4} dy = -\frac{1}{3} \frac{1}{y^3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log^3 x}$$

Esempio 9 $\int \frac{1}{x \log x} dx$ $y = \log x$ $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log |\log x|$$

Esempio 10 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

Pongo $y = e^x$, quindi $y = e^x dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$= \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(1+e^{2x})$$

$$= \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y = \arctan e^x$$

Esempio 11 $\int \sqrt{1-x^2} dx$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy$$

Pongo $x = \sin y$, quindi
 $\frac{dx}{dy} =$ derivata di x rispetto ad y
 $= \cos y$, quindi
 $dx = \cos y dy$

$$= \int \cos y \cdot \cos y dy$$

$$= \int \cos^2 y dy = \int \frac{\cos(2y)+1}{2} dy$$

$$\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1$$

$$= \frac{1}{4} \sin(2y) + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{1}{2} y$$

Devo tornare in x

$$\sin y = x ; y = \arcsin x, \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}. \text{ Quindi}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

Ossewazioni: si può usare l'integrazione per sostituzione "al contrario", cioè ponendo $y = \text{Mostro}(x)$ oppure $x = \text{Mostro}(y)$ (basta cambiare il nome alle variabili !!)

Molti passaggi sono stati fatti brutalmente, senza considerare problemi di segni e simili. La verifica risolve tutti i dubbi.

Esempio 12 $\int x^3 e^{-x^2} dx$

Pongo $y = x^2$, quindi $dy = 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 e^{-x^2} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int y e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \{ -e^{-y} y + \int e^{-y} dy \} = -\frac{1}{2} y e^{-y} - \frac{1}{2} e^{-y}$$

corretto dopo video

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

IDEM

Allo stesso modo faccio $\int x^{2k+1} e^{\pm x^2} dx$

Esempio 13 $\int \sin(\log x) dx$

$y = \log x \quad dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int x \sin(\log x) \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy}$$

$$= \int e^y \sin y dy \rightsquigarrow \text{parti + grande ritorno.} \quad \square$$