

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Formula fondamentale: $\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

Prendo $\Phi(x) = F(G(x))$ $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$

$$\Phi'(x) = F'(G(x)) G'(x) = f(G(x)) g(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Sostituisco nell'identità fondamentale:

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi'(x) dx &= \Phi(b) - \Phi(a) = F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= \int_a^b f(G(x)) g(x) dx &= [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} \\ & &= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Uguagliando primo e ultimo otteniamo

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

FORMULA DI
INTEGRAZIONE
PER
SOSTITUZIONE

Interpretazione brutale: devo calcolare

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx \quad \text{Pongo } y = G(x).$$

Come cambia $f(G(x)) \rightsquigarrow f(y)$. Come cambiano gli estremi?

Quando $x=a$ ho che $y=G(a)$. Quando $x=b$ ho che $y=G(b)$

Come cambia dx ?

$$\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x) \quad \text{"quindi"} \quad dy = g(x) dx$$

In questo modo

$$\int_{G(a)}^{G(b)} \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

— o — o —

Esempio 1 $\int x \cos x^2 dx$

Pongo $y = x^2$. Quindi

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ cioè } dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos x^2}_{\cos y} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} \sin x^2$$

↑
torna in x

Esempio 2 $\int x^2 e^{-x^3} dx =$

Pongo $y = x^3$. Quindi

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ cioè } dy = 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \underbrace{e^{-x^3}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{dy} = \frac{1}{3} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{3} e^{-y} = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

Esempio 3 $\int \underbrace{\sin x}_y \cdot \underbrace{\cos x}_{dy} dx$

si può fare con formula di duplicazione

In alternativa pongo $y = \sin x$,

quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, $dy = \cos x dx$

$$= \int y dy$$

$$= \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

Esempio 4 $\int \sin^3 x dx$

$$\begin{aligned} &= \int \underbrace{\sin x}_f \cdot \underbrace{\sin^2 x}_g dx = \underbrace{(-\cos x)}_F \underbrace{\sin^2 x}_G - \int \underbrace{(-\cos x)}_F \cdot \underbrace{2 \sin x \cos x}_g dx \\ &= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x dx \end{aligned}$$

1° modo: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \leadsto$ grande ritorno

2° modo: sostituzione $y = \cos x$, quindi $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, $dy = -\sin x dx$

$$\int \sin x \cdot \cos^2 x dx = - \int \underbrace{\cos^2 x}_{y^2} \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int y^2 dy = -\frac{1}{3} y^3 = -\frac{1}{3} \cos^3 x$$

In conclusione

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x \cdot \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos^3 x$$

Esercizio: confrontare con la risposta che si ottiene con grande ritorno

3° modo: percorso da subito: $\int \sin^3 x = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx =$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx \quad \text{Pongo } y = \cos x, \dots \quad dy = -\sin x dx$$

$$= - \int \underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{1 - y^2} \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int (1 - y^2) dy = -y + \frac{1}{3} y^3 = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

Occhio! è la stessa risposta di sopra.
— o — o —

Osservazione: questa tecnica funziona con tutte le potenze DISPARI di $\sin x$ e $\cos x$ (in alternativa al grande ritorno)

Esempio 5 $\int \cos^5 x dx = \int \cos x \cdot \cos^4 x dx$
 $= \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 dx$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, cioè $dy = \cos x \cdot dx$

$$\int (1 - \sin^2 x)^2 \underbrace{\cos x dx}_{dy} = \int (1 - y^2)^2 dy = \int (1 - 2y^2 + y^4) dy$$

$$= y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$$

Esercizio: confrontare svolgimento con grande ritorno.

Esempio 6 (Funzione anche con esponenti negativi)

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \frac{1}{\cos x} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} \, dy = -\log |y| = -\log |\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Esempio 7 $\int \frac{\log x}{x^2} \, dx = \int \frac{1}{x^2} \log x \, dx = -\frac{1}{x} \cdot \log x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx$

F G F G F G

$$= -\frac{1}{x} \log x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \log x - \frac{1}{x}$$

Esempio 8 $\int \frac{\log x}{x} \, dx = \int \frac{1}{x} \log x \, dx = \log |x| \cdot \log x - \int \log |x| \cdot \frac{1}{x} \, dx$

F G F G F G

A parte il modulo, che non serve a nulla perché da subito deve essere $x > 0$ perché abbia senso l'integrande, ho grande ritorno

$$\int \frac{\log x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \log^2 x$$

Si voleva per sostituzione ponendo $y = \log x \quad dy = \frac{1}{x} \, dx$

$$\int \frac{\log x}{x} \, dx = \int \underbrace{\log x}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \, dx}_{dy} = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \log^2 x.$$

— o — o —