

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 068

Titolo nota

16/12/2010

Esempio 1 $\int \underset{\text{f}}{e^{2x}} \underset{\text{g}}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \underset{\text{f}}{e^{2x}} \underset{\text{g}}{\cos x} - \int \frac{1}{2} \underset{\text{f}}{e^{2x}} \underset{\text{g}}{(-\sin x)} dx$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx$$

Calcolo a parte (per parti) il secondo integrale

$$\int \underset{\text{f}}{e^{2x}} \underset{\text{g}}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \underset{\text{f}}{e^{2x}} \underset{\text{g}}{\sin x} - \int \frac{1}{2} \underset{\text{f}}{e^{2x}} \underset{\text{g}}{\cos x} dx$$

$\text{f g} \rightarrow$ provare per vedere cosa succede

Tornando all'integrale iniziale abbiamo che

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \underbrace{\frac{1}{4} \int e^{2x} \cos x dx}_{\text{grande ritorno}}$$

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x \quad \text{ed infine}$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \sin x \quad \text{Verifica: ...}$$

Con la tecnica di "grande ritorno" si fanno tutte le primitive del tipo

$$\int \cos^k x dx, \quad \int \sin^k x dx \quad (k \text{ intero positivo: ogni passaggio per parti riduce l'esponente di } 2)$$

$$\int \cos(\alpha x) e^{\beta x} dx, \quad \int \sin(\alpha x) e^{\beta x} dx : \text{il grande ritorno c'è dopo 2 passaggi per parti.}$$

$$\int \cos(\alpha x) \sin(\beta x) e^{\gamma x} dx : \text{diventano i casi precedenti con prodotto} \rightarrow \text{somma.}$$

Esempio 2 $\int x^2 \cdot 2^x dx$ Mi serve $\int 2^x dx = 2^x \frac{1}{\log 2}$

volendo è un caso particolare di $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

$$\int 2^x dx = \int e^{x \cdot \log 2} dx = \text{quello di sopra con } \alpha = \log 2$$

$$\int x^2 \cdot 2^x dx = x^2 \cdot 2^x \frac{1}{\log 2} - \int 2x \cdot \frac{2^x}{\log 2} dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2} x^2 \cdot 2^x - \frac{2}{\log 2} \int x \cdot 2^x dx$$

$$= \frac{1}{\log 2} \cdot x^2 \cdot 2^x - \frac{2}{\log 2} \left\{ x \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot 2^x - \int 1 \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot 2^x dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \cdot x^2 \cdot 2^x - \frac{2}{\log^2 2} x \cdot 2^x - \frac{2}{\log^2 2} \int 2^x dx \text{ e si finisce.}$$

Esempio 3 Trucco dell'1 nascosto

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x = x (\log x - 1) \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int \log(1-x^2) dx = \int \log[(1+x)(1-x)] dx =$

$$= \int \log(1+x) dx + \int \log(1-x) dx$$

$$\int \log(1+x) dx = (1+x) \log(1+x) - (1+x)$$

Formula di sopra con $1+x$ al posto di x : verifica!!

$$\int \log(1-x) dx = [(1-x) \log(1-x) - (1-x)] (-1)$$

↑ dovuto al fatto che c'è $-x$...

Esempio 5 $\int x^6 \log(x^{27}) dx = 27 \int x^6 \log x dx$

$$\int x^6 \log x dx = \frac{1}{7} x^7 \log x - \int \frac{1}{7} x^7 \cdot \frac{1}{x} dx$$

F G F G F g

$$= \frac{1}{7} x^7 \log x - \frac{1}{7} \int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 \log x - \frac{1}{49} x^7$$

— o — o —

Con questa tecnica si fanno le primitive del tipo $\int p(x) \log x dx$
↑ polinomio.

Esempio 6 $\int \frac{\log x}{x^6} dx = \int \frac{1}{x^6} \cdot \log x = -\frac{1}{5} \frac{1}{x^5} \log x - \int \left(-\frac{1}{5} \frac{1}{x^5}\right) \frac{1}{x} dx$

F G F G F g

$$= -\frac{1}{5} \frac{\log x}{x^5} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^6} = -\frac{1}{5} \frac{\log x}{x^5} - \frac{1}{25} \frac{1}{x^5}$$

Verifica...

Esempio 7 $\int \arctan x dx$

$$= \int 1 \cdot \arctan x = x \cdot \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx$$

F G F G F g

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Esempio 8 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$$= \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx = (-\cos x) \frac{1}{\cos x} - \int (-\cancel{\cos x}) \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}\right) (-\sin x) dx$$

F G F G F g

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \dots$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$0 = 1 \quad !!!!!$$

Capire cosa è successo e perché !!!

Esempio 9 $\int_0^{\pi} |x \cos x| dx$ Bisogna capire il segno di $x \cos x$. Dipende dal segno di $\cos x$

$$|x \cos x| = \begin{cases} x \cos x & \text{in } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{dove } \cos x \geq 0) \\ -x \cos x & \text{in } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \quad \text{" } \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |x \cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} |x \cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |x \cos x| dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x dx \end{aligned}$$

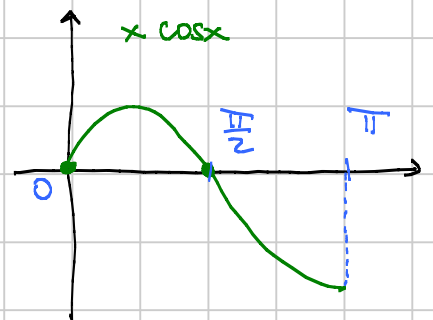
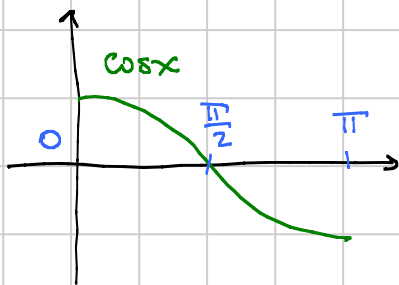
Calcolo la primitiva: $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$
G F G F g F

$$\dots = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} - [x \sin x + \cos x]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 1 - (-1 - \frac{\pi}{2}) = \pi$$

Se fosse stato senza valore assoluto

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi} = \pi \sin \pi + \cos \pi - 0 \sin 0 - \cos 0 = -2.$$

È ragionevole che sia negativo? Grafico di $x \cos x$



$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0$ perchè le 2 aree sono uguali e si compensano

Quando moltiplico per x la seconda area (quella negativa) viene moltiplicata per i valori della x più grandi, quindi l'area negativa prevale.

— 0 — 0 —