

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 067

Titolo nota

16/12/2010

INTEGRAZIONE PER PARTI Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in un intervallo $[a, b]$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ due loro primitive
 $F'(x) = f(x)$ $G'(x) = g(x)$ $\forall x \in (a, b)$.

Pongo $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$. Allora $\Phi'(x) = F'(x) G(x) + F(x) G'(x)$
 $= f(x) G(x) + F(x) g(x)$

Fatto generale

$$\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Applicando il fatto generale nel caso specifico $\Phi(x) = F(x) G(x)$ ottengo

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) G(x) + F(x) g(x)] dx &= [F(x) \cdot G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) G(x) dx + \int_a^b F(x) g(x) dx \end{aligned}$$

Portando un termine a destra ottengo infine

$$\int_a^b f(x) G(x) dx = [F(x) G(x)]_a^b - \int_a^b F(x) g(x) dx$$

FORMULA
INTEGRAZIONE
PER
PARTI

Un po' abusivamente si ricorda come

$$\int f G = FG - \int F g$$

Esempio 1

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x \cdot 1 dx \\ &\quad \begin{matrix} G & f \\ & \neq \end{matrix} & \begin{matrix} G & F \\ & \neq \end{matrix} & \begin{matrix} F & g \\ & \neq \end{matrix} \\ &= x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

Verifica: $[x \sin x + \cos x]' = \cancel{\sin x} + x \cdot \cos x - \cancel{\sin x} = x \cos x$ Ok

Regola generale: $f \rightsquigarrow$ qualcosa che so integrare
 $G \rightsquigarrow$ qualcosa che derivato migliora

Esempio 2 $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x$
 $\quad \quad \quad G \quad f \quad \quad \quad G \quad F \quad \quad \quad g \quad F$

Esempio 3 $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx$
 $\quad \quad \quad G \quad f \quad \quad \quad G \quad F \quad \quad \quad g \quad F$
 $\quad \quad \quad = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$

Resta da calcolare

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

$\quad \quad \quad G \quad f \quad \quad \quad G \quad F \quad \quad \quad g \quad F$

Tornando all'integrale iniziale:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

Verifica: $(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x)' = \cancel{2x \sin x} + x^2 \cos x + \cancel{2 \cos x} - \cancel{2x \sin x} + \cancel{-2 \cos x} = x^2 \cos x \quad \text{Ok,}$

— o — o —

Con questo sistema si integrano tutte le funzioni del tipo

$$\int p(x) e^x dx$$

$$\int p(x) \sin x dx$$

$$\int p(x) \cos x dx$$

con $p(x)$ polinomio, e anche più in generale

$$\int p(x) e^{ax} dx$$

$$\int p(x) \sin(ax) dx$$

$$\int p(x) \cos(ax) dx$$

$$\int p(x) \sin(ax) \cos(bx) dx$$

Osservazione: quando c'è un prodotto $\sin(ax) \cos(bx)$ si trasforma in somma grazie alle formule trigo. **PRODOTTO $\rightarrow$ SOMMA**

Esempio 4 $\int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_G \cdot \underbrace{\cos x}_F \, dx = \underbrace{\cos x}_G \cdot \underbrace{\sin x}_F - \int \underbrace{(-\sin x)}_g \underbrace{\sin x}_F \, dx$
 $= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$
*se uno procede per parti
 torna indietro !!!*

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Abbiamo così ottenuto che

$$\int \cos^2 x = \cos x \cdot \sin x + x - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\text{GRANDE RITORNO}}$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x, \text{ quindi}$$

$$\boxed{\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x}$$

Esempio 5 $\int \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{\sin x}_G \cdot \underbrace{\sin x}_F \, dx = \underbrace{\sin x}_G \cdot \underbrace{(-\cos x)}_F - \int \underbrace{\cos x}_g \cdot \underbrace{(-\cos x)}_F \, dx$
 $= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$
 $= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$
 $= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx - \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{\text{grande ritorno}}$

da cui: $2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x, \text{ quindi}$

$$\boxed{\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x}$$

L'esempio 4 e 5 si potevano fare con formule trigonometriche

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \text{ Da queste si ricava che}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x).$$

— 0 — 0 —

Esempio 6 $\int \cos^3 x \, dx =$

$$\begin{aligned}&= \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos^2 x} \, dx = \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g}{\cos^2 x} - \int \underset{f}{\sin x} \cdot 2 \underset{g}{\cos x} (-\sin x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot \sin^2 x \, dx \quad \uparrow \text{precorso} \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \, dx - 2 \int \cos^3 x \, dx \quad \uparrow \text{grande ritorno}\end{aligned}$$

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x. \quad \text{Dividendo si finisce.}$$

— 0 — 0 —

Più in generale

$$\begin{aligned}\int \cos^k x \, dx &= \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos^{k-1} x} \, dx = (\sin x) \underset{g}{\cos^{k-1} x} - \int \underset{f}{\sin x} \cdot (k-1) \underset{g}{\cos^{k-2} x} (-\sin x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1) \int \sin^2 x \cdot \cos^{k-2} x \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{k-2} x \, dx \\ &= \sin x \cos^{k-1} x + (k-1) \underbrace{\int \cos^{k-2} x \, dx}_{\text{esponente + piccolo}} - (k-1) \underbrace{\int \cos^k x \, dx}_{\text{grande ritorno}}\end{aligned}$$