

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 066

Titolo nota

15/12/2010

Primitiva di $\frac{1}{x}$

$\int x^\alpha dx$ con $\alpha = -1$.

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{NI}$$

È vero che $(\log x)' = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$.

D'altra parte $\frac{1}{x}$ è definita per $x \neq 0$, non solo per $x > 0$. Quindi ha senso cercare una funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

Questa è $F(x) = \log |x|$. Facciamo la verifica:

• per $x > 0$ ho che $F(x) = \log x$, quindi $F'(x) = \frac{1}{x}$,

• per $x < 0$ ho che $F(x) = \log(-x)$, quindi $F'(x) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$
Quindi $\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$

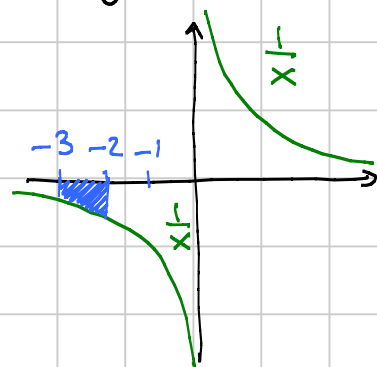
Esempio 1 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$
senza valore assoluto perché
siamo sugli $x > 0$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_{-3}^{-2} = \log |-2| - \log |-3| = \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3} < 0$$

ora serve

Non stupisce che sia venuto negativo perché è integrale di una $f(x) < 0$.

$\int_{-3}^2 \frac{1}{x} dx$ Non è un integrale proprio.



Discorso del +c

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$$

Ok per calcolare numericamente gli integrali tra 2 estremi.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c \leftarrow \text{insieme di tutte le primitive di } x^2$$

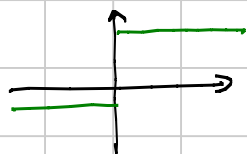
$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c \leftarrow \text{Non è l'insieme di tutte le primitive di } \frac{1}{x}$$

Un'altra primitiva è

$$F(x) = \begin{cases} \log x + 3 & x > 0 \\ \log |x| + 7 & x < 0 \end{cases}$$

Trucco: se la zona di definizione è fatta di 2 pezzi (in questo caso $x > 0$ ed $x < 0$), allora posso usare 2 valori diversi di c nei 2 pezzi.

Fatto generale: se una funzione in un intervallo ha derivata nulla, allora è costante (Lagrange)



se una funzione definita per $x \neq 0$ ha derivata nulla, allora è costante per $x < 0$ e per $x > 0$, ma le 2 costanti possono essere diverse

Quindi: aggiungere +c alla fine

→ non serve per il calcolo operativo

→ non basta per descrivere TUTTE le primitive (dovrei usare c diversi in ogni pezzo dell'insieme di definizione).

Quindi non c'è una sola buona ragione per mettere +c alla fine.

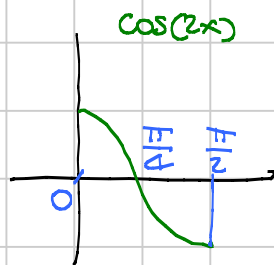
Esempio 2 $\int_0^2 e^{3x} dx$. Faccio la primitiva, cioè cerco qualcosa che derivato faccia e^{3x}

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \quad [\text{Verifica: } (\frac{1}{3} e^{3x})' = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}]$$

$$\int_0^2 e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^2 = \frac{1}{3} [e^{3x}]_0^2 = \frac{1}{3} (e^6 - 1).$$

Esempio 3 $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x)$ [Verifica!...]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin 0) = 0$$



Esempio 4 $\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$
 $= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) = -\frac{1}{4} \cos(2x)$ ↑ precorso

Verifica: $\left(-\frac{1}{4} \cos(2x) \right)' = -\frac{1}{4} (-\sin(2x)) \cdot 2 = \frac{1}{2} \sin(2x)$

Altro modo: $\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$

Verifica: $\left(\frac{1}{2} \sin^2 x \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$ Ok.

Come è possibile che siano venute 2 primitive completamente diverse?

Non sono diverse per ragioni precorsistiche:

$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$, quindi $-\frac{1}{4} \cos(2x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x$,
 quindi le 2 primitive sono la stessa a meno di una costante.

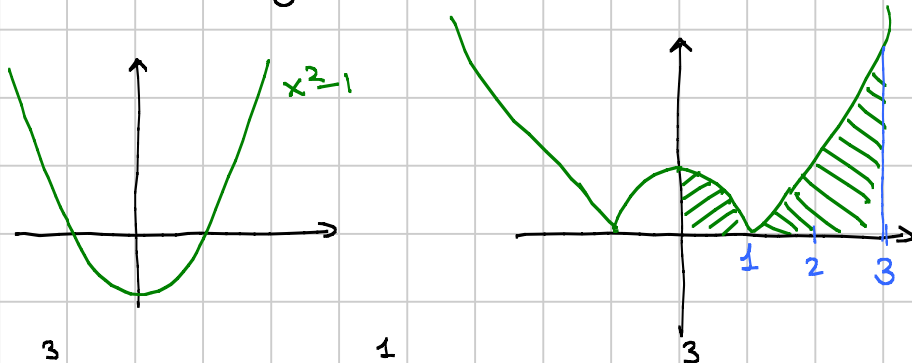
Esempio 5 $\int \sqrt[3]{x+6} dx = \int (x+6)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+6)^{\frac{1}{3}+1} =$
 $= \frac{3}{4} (x+6)^{\frac{4}{3}}$ [Verifica: $\left(\frac{3}{4} (x+6)^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} (x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$]

Esempio 6 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \int (2x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}} (2x+3)^{\frac{1}{2}}$
 $= 2 (2x+3)^{\frac{1}{2}}$ [Verifica: $\left[2 (2x+3)^{\frac{1}{2}} \right]' = 2 \cdot \frac{1}{2} (2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$
 OPS, non torna ↑ deriv. di 2x

C'è un 2 di troppo !! Quindi

$\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \sqrt{2x+3}$ [Verifica: torna].

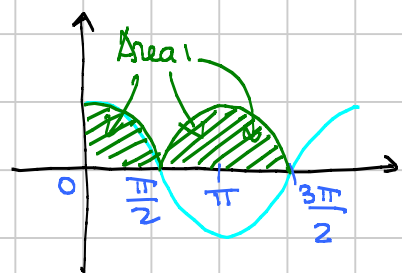
Esempio 7 $\int_0^3 |x^2-1| dx$ SPEZZARE LE VARIE ZONE



$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2-1| dx &= \int_0^1 |x^2-1| dx + \int_1^3 |x^2-1| dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2) dx + \int_1^3 (x^2-1) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^3\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 9 - 3 - \frac{1}{3} + 1 = \text{conto...}$$

Esempio 8 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx = 3$



Spezzamento

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = \text{conti... viene.}\end{aligned}$$