

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 065

Titolo nota

15/12/2010

TECNICHE DI INTEGRAZIONE Come trovare una primitiva di una funzione $f(x)$ data.

Definito $\int_a^b f(x) dx$. Se $f(x)$ è continua questo si calcola cercando una primitiva $F(x)$ di $f(x)$, cioè una funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Una volta ottenuta una qualunque primitiva si ha

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Trovare una primitiva è un'operazione NON meccanica.

Tecniche standard:

- primitive elementari
- integrazione per parti
- integrazione per sostituzione
- integrazione funzioni razionali
- sostituzioni razionalizzanti

Primitive elementari = leggere la tabellina di derivate al contrario !!!

Notazione: $\int f(x) dx$ = una qualunque primitiva di $f(x)$.
 $\uparrow$ senza estremi (funzione della x)

$$\int e^x dx = \text{qualcosa che derivato fa } e^x = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + 2\pi$$

$$\int \cos x dx = \text{qualcosa che derivato fa } \cos x = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int 1 dx = x$$

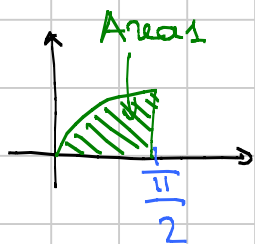
$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

Più in generale $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{per ogni } \alpha \neq -1.$$

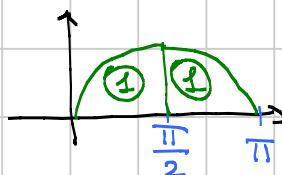
[Verifica: fai la derivata!!! $\left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]' = \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1) \cdot x^\alpha = x^\alpha$]

Esempio 1 $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$
 $= 0 + \cos 0 = 1.$



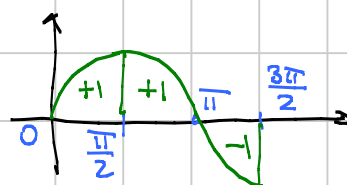
Nota bene: l'integrale è (e doveva essere) positivo perché l'integranda è > 0 nell'intervallo di integrazione.

Esempio 2 $\int_0^\pi \sin x dx = 2$



$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Esempio 3 $\int_0^{3\pi/2} \sin x dx = 1$

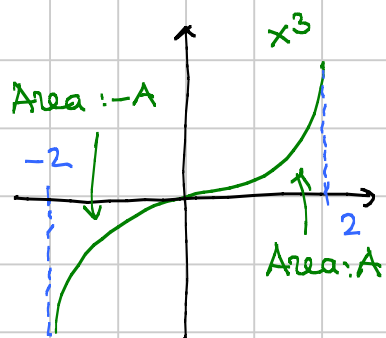


(Fare i conti con la primitiva per esercizio)

Esempio 4 $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3} [x^3]_0^2 = \frac{1}{3} (8-0) = \frac{8}{3}$

verifica: $\left(\frac{1}{3} x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ ok

Esempio 5 $\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4\right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} [x^4]_{-2}^2 = \frac{1}{4} (16-16) = 0.$



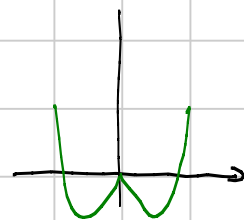
Fatto generale: se $f(x)$ è una funzione DISPARI, allora

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } a \geq 0$$

↑ integrale su un intervallo simmetrico rispetto all'origine: $[-a, a]$.

Fatto generale 2: se $f(x)$ è una funzione PARI, allora

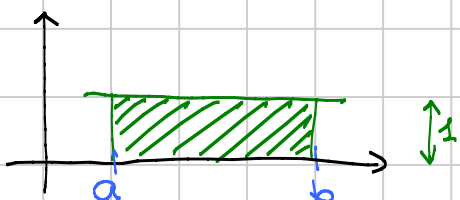
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



Esempio 6 $\int_{45}^{74} 1 dx = \int_{45}^{74} 1 dx = 74 - 45 = 29$
 (Note: "sottinteso" points to the 1 in the integrand)

Ragione calcolosa: $\int_a^b 1 dx = [x]_a^b = b - a$

Ragione geometrica: $\int_a^b 1 dx = \text{lunghezza intervallo } [a, b] = b - a$

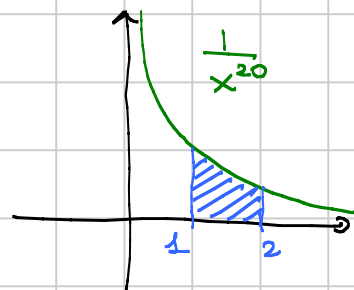


$$\begin{aligned} \int_a^b 1 dx &= \text{area del rettangolo} \\ &= \text{base} \cdot \text{altezza} \\ &= (b-a) \cdot 1 \\ &= b-a \end{aligned}$$

Esempio 7 $\int_1^2 \sqrt{x} dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2$
 $= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} [2^{\frac{3}{2}} - 1] = \frac{2}{3} [2\sqrt{2} - 1]$
 (Note: "verifica" points to the antiderivative: $\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ OK)

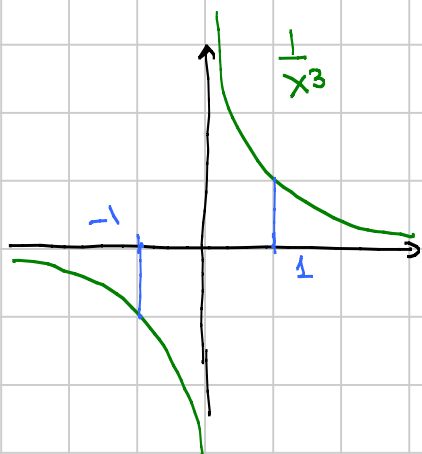
Esempio 8 $\int_1^2 \frac{1}{x^{20}} dx = \int_1^2 x^{-20} dx = \left[\frac{1}{-19} x^{-19} \right]_1^2 =$
 $= -\frac{1}{19} \left[\frac{1}{x^{19}} \right]_1^2 = -\frac{1}{19} \left[\frac{1}{2^{19}} - 1 \right]$
 (Note: "Numero POSITIVO !!!" points to the result, indicating the integrand is positive)

Dovrà venire un numero positivo perché l'integranda è positiva !!!



Esempio 9 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^1 x^{-3} dx = \left[\frac{1}{-2} x^{-2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1$

$$= -\frac{1}{2} (1-1) = 0. \quad \text{NO!!!!!!!!!!!!}$$



Non si tratta di un integrale PROPRIO perché la funzione integranda non è limitata, quindi l'integrale non è nemmeno definito.

Esempio 10 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

↑
verifica: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Esempio 11 $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

↑
f(x) è pari, quindi è il doppio del precedente.

Esempio 12 $\int_0^2 (x^2 - 2x + 3e^x + \sqrt{x}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3e^x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$

Fare la verifica !!!

$$= \frac{8}{3} - 4 + 3e^2 + \frac{2}{3} 2\sqrt{2} - 3e^0 = \frac{8}{3} - 4 + \frac{4}{3}\sqrt{2} + 3(e^2 - 1).$$

— 0 — 0 —