

4 Come si calcolano operativamente gli integrali

Primitiva Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dice primitiva di f una qualunque funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{basta } (a, b))$$

Osservazione Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora anche $F(x) + 37$ è una primitiva. Più in generale $F(x) + c$ è una primitiva per ogni costante $c \in \mathbb{R}$.

Primitive calcolo di integrali. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F(x)$ una qualunque sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \underset{\text{notazione}}{[F(x)]_a^b} = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Oss. È fondamentale che il risultato non dipenda dalla primitiva scelta. Questo è ovvio quando invece di $F(x)$ uso $F(x) + c$ (la costante se ne va). È ovvio in tutti i casi in cui le primitive differiscono tra di loro per una costante.

Teorema Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, e F_1 ed F_2 sono due primitive di f , allora

$F_1(x) - F_2(x)$ è una funzione costante.

Dim.: Pongo $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Allora

F_1 e F_2 sono primitive

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \stackrel{\downarrow}{=} f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

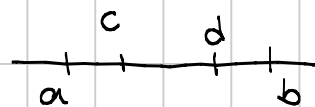
Perché $\Phi'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (basterebbe anche (a, b)) ho che $\Phi(x)$ è costante. Perché?

Prendo 1 punto $y \in [a, b]$ e per Lagrange ho che

$$\Phi(y) - \Phi(a) = (y-a) \cdot \underset{0}{\Phi'(c)} = 0$$

Quindi $\Phi(y) = \Phi(a)$ per ogni $y \in [a, b]$, quindi Φ è costante.

Oss. Più in generale vale che



$$\int_c^d f(x) dx = [F(x)]_c^d$$

questo perché, se $F(x)$ è primitiva in $[a, b]$, allora è primitiva pure in $[c, d]$.

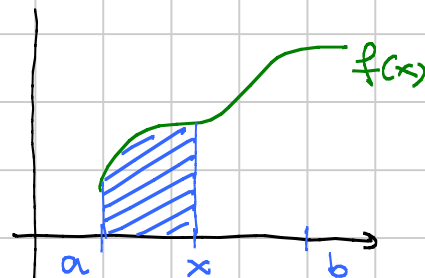
— o — o —

FUNZIONE INTEGRALE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile.

Allora per ogni $x \in [a, b]$ pongo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

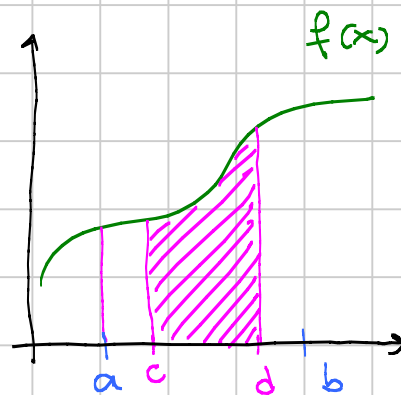
↑
variabile di integrazione



Proprietà fondamentale della funzione integrale

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Quindi: se io conoscessi la funzione integrale, saprei calcolare l'integrale di $f(x)$ tra ogni coppia di estremi.



TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione integrale

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.

Teorema della media integrale. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Siano

$$m = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$M = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

(esistono per Weierstrass)

Allora esiste almeno un p.to $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dim. Per ogni $x \in [a, b]$ si ha che

$$m \leq f(x) \leq M$$

quindi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Dividendo ottengo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_\lambda \leq M$$

Ma allora per uno delle tante varianti al teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un valore $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \lambda$

— o — o —

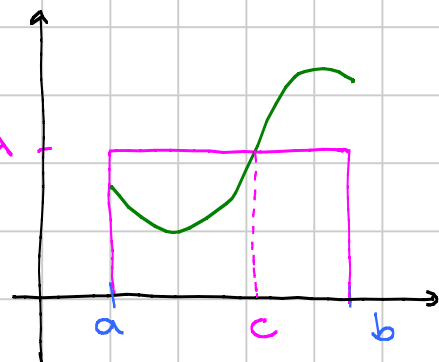
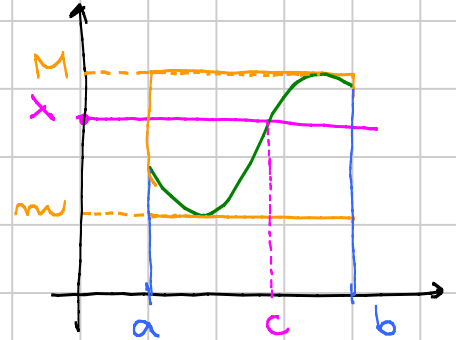
Significato geometrico del valore λ e del p.to c .

Riscrivo la tesi come

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda(b-a) = (b-a)f(c)$$

λ è l'altezza del rettangolo che ha come base $[a, b]$ e come area l'integrale di f .

Area rettangolo di altezza λ = integrale funzione



Dim. teo. Fondamentale calcolo integrale.

Sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ la funzione integrale. Voglio dimostrare che $F(x)$ è una primitiva, cioè $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int_x^{x+h} f(t) dt}_{\text{integrale in } [x, x+h]}$$

↑
lunghezza intervallo di integrazione

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h)$$

↖ p.to misterioso nell'intervallo $[x, x+h]$

Quando $h \rightarrow 0$, ho che $c_h \rightarrow x$. Quindi, essendo $f(x)$ continua, il limite di sopra è proprio $f(x)$ (solito cambio di variabili $y = c_h$: quando $h \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow x$, quindi...).

Oss. Ho fatto il caso $h \rightarrow 0^+$.

