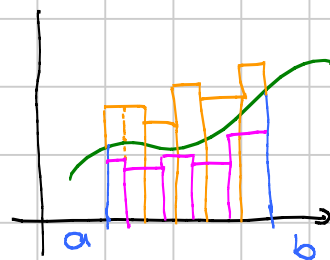
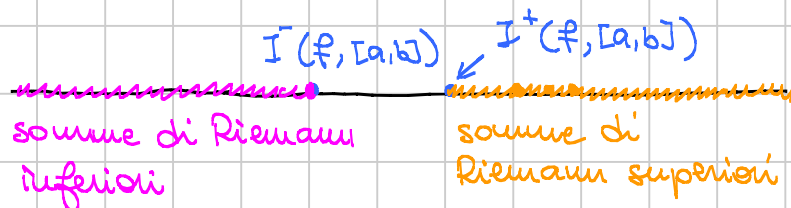


Somme di Riemann inferiori e superiori e definizione di integrale



Se c'è il buco, allora $I^- < I^+$, e $f(x)$

non è integrabile in $[a, b]$

Se non c'è il buco, allora c'è un unico elemento separatore e quello è proprio

l'integrale.

$\int_a^b f(x) dx$

Caratterizzazione delle funzioni integrabili Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$ se e solo se

$\forall \varepsilon > 0$ esistono una somma di Riemann superiore ed una inferiore che distano meno di ε .

In simboli: $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ funzioni a gradini tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \varepsilon$$

Inoltre $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ le posso pensare costruite a partire dalla stessa suddivisione di $[a, b]$, più di considerare alcuni rettangoli adiacenti di uguale altezza.

Quali funzioni sono integrabili? "Quasi tutte", in particolare

→ tutte le funzioni monotone

→ tutte le funzioni continue

→ tutte le funzioni "continue a tratti", cioè continue su sottointervalli con il limite che esiste agli estremi.

Oss. Dove abbiamo usato che la funzione $f(x)$ è limitata?

Per essere sicuri che esistano almeno una somma di Riemann superiore ed una inferiore.

Dim. che le funzioni monotone sono integrabili.

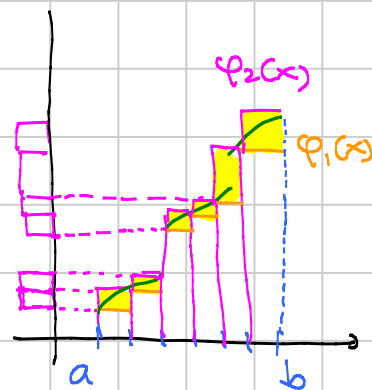
Facciamo il caso (debolmente) crescente.

Per la caratterizzazione mi basta, per ogni $\varepsilon > 0$, trovare una somma di R. superiore ed una inferiore che distano meno di ε .

Suddivido $[a, b]$ in n parti uguali.

Costruisco $\varphi_1(x)$ prendo in ogni intervallo il valore nell'estremo sx (cioè il minimo) e $\varphi_2(x)$ prendo il valore nell'estremo dx (cioè il massimo). Ora ho che

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx &= \text{somma area rettangoli gialli} \\ &= \text{colonna che ha come base } \frac{b-a}{n} \\ &\quad \text{e come altezza } f(b) - f(a) \\ &= [f(b) - f(a)] \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$



— o — o —
Puoi prendere n grande, la differenza è piccola a piacere.

Esempio di funzione per cui c'è il buco tra $I^-(f, [a, b])$ e $I^+(f, [a, b])$.

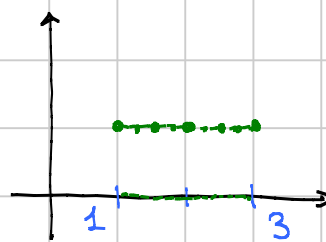
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$[a, b] = [1, 3]$$

Ogni funzione a gradino $\varphi(x) \geq f(x)$ deve per forza essere ≥ 1
" " " $\varphi(x) \leq f(x)$ " " " " ≤ 0

$$\text{Quindi } I^-(f, [1, 3]) = 0$$

$$I^+(f, [1, 3]) = 2 \quad (\text{la cosa migliore è il rettangolo con base } [1, 3] \text{ e altezza } 1)$$



Proprietà dell'integrale

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili in $[a, b]$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Altro modo di dire le prime due proprietà: la funzione $f(x) \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx$

è un'applicazione lineare (da dove a dove?)

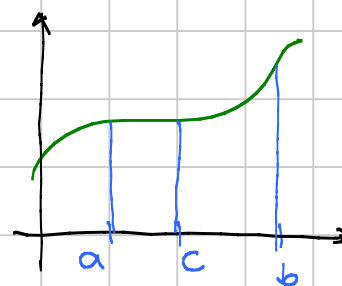
$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \text{nulla di furbo} !!!!$$

(si vede già per funzioni con 2 gradienti)

Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in (a, b)$, allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Se $c \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

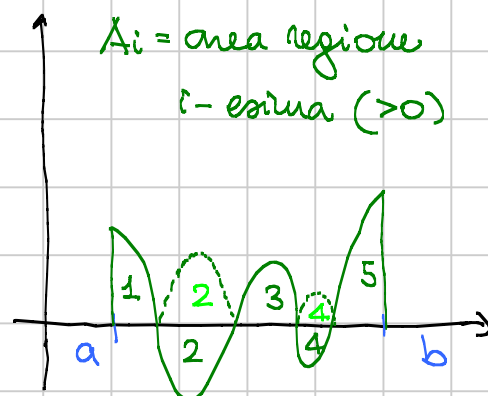


$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Cosa vuol dire in termini di aree

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = |A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5|$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$



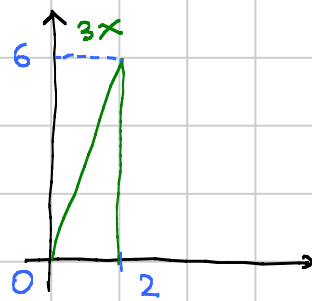
Nel calcolo di $|\int f|$ ho compensazione tra aree + e aree -
" " " $\int |f|$ tutte le aree si sommano.

Esempio 1 $\int_0^2 3x \, dx =$

= area triangolo

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$

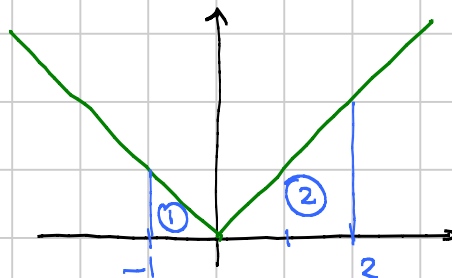
↑ ↑
base altezza.



Esempio 2 $\int_{-1}^2 |x| \, dx =$

= Area 1 + Area 2

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$



Esempio 3 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx =$

= area semicerchio di raggio 1

$= \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2}$

