

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 062

Titolo nota

14/12/2010

INTEGRALE DI RIEMANN

- ① Come si indica
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definisce
- ④ Come si calcola

1 Notazioni Due ingredienti fondamentali

- zona di integrazione: intervallo $[a, b]$ (dunque limitato)
- funzione da integrare (integrand): funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$).

Integrale di $f(x)$ in $[a, b]$ è

simbolo di
integrale



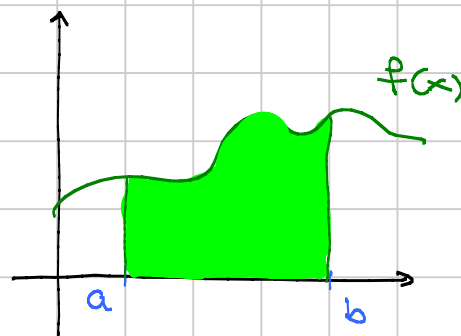
$f(x)$ integranda

dx indica la variabile rispetto a cui si integra

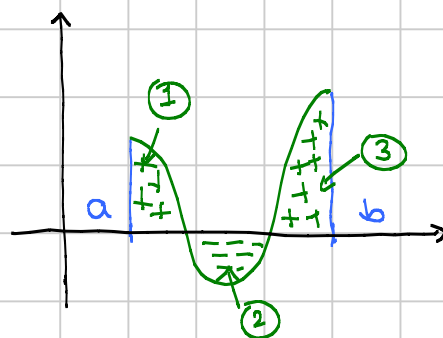
estremi zona di integrazione

2 Significato geometrico

$\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO}$
della regione di piano che
sta tra l'asse x ed il
grafico di $f(x)$



"Con segno" significa che le aree sopra
l'asse x contano con il segno $\oplus$, quelle
sotto con il segno $\ominus$.



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area } ① + \text{Area } ③ - \text{Area } ②$$

Problema: come definire l'area di una regione "storta".

3 Definizione di integrale

→ Caso banale

→ Caso semi-banale

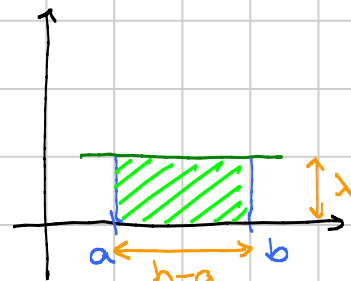
→ Caso generale

Caso banale: $f(x) = \text{costante}$. $f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a, b]$

In questo caso $\int_a^b f(x) dx =$

= area con segno del rettangolo

$$= \underbrace{\lambda}_{\text{altezza con segno}} \underbrace{(b-a)}_{\text{lunghezza base}}$$



Caso semibanale: $f(x) = \text{costante a tratti}$

Esistono punti

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

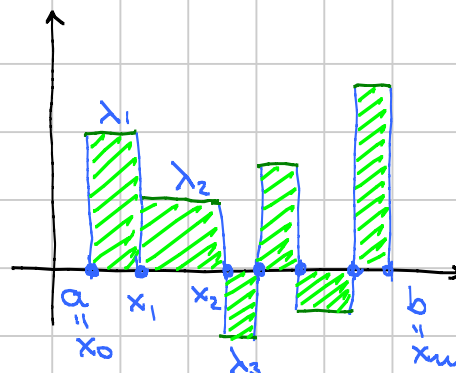
ed esistono costanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

In questo caso

$\int_a^b f(x) dx =$ SOMMA ALGEBRICA delle aree dei vari rettangoli

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza con segno del rettangolo i-esimo}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{lunghezza base rettangolo i-esimo}}$$



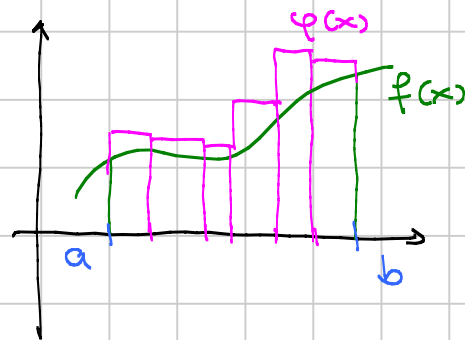
Osservazione: ① i vari sottointervalli possono avere lunghezze diverse.

② il numero dei sottointervalli non è fissato in partenza.

Le funzioni costanti a tratti si chiamano anche funzioni a gradino, funzioni semplici, STEP FUNCTIONS.

Caso generale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata qualunque.

Prendo una funzione $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a gradino tale che $f(x) \leq \varphi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.



Idea 1: L'integrale di $\varphi(x)$ (che ho già definito) deve essere $\geq$ dell'integrale di $f(x)$ (che voglio definire).

Idea 2: L'integrale di $f(x)$ sembra essere l'inf di tutte le aree corrispondenti a funzioni $\varphi(x) \geq f(x)$ a gradino.

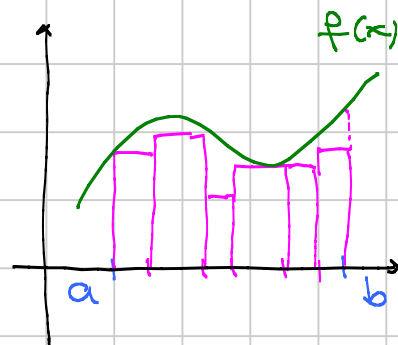
Si definisce INTEGRALE SUPERIORE di $f(x)$ in $[a, b]$ il numero

$$I^+(f, [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradino e } \varphi(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \right\}$$

Idea brutale: per realizzare l'inf. devo usare molti sottointervalli molto piccoli e non sprecare in altezza.

In modo analogo si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f, [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradini e } \varphi(x) \leq f(x) \forall x \in (a, b) \right\}$$



Teorema Per ogni funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata si ha che

$$I^-(f; [a, b]) \leq I^+(f, [a, b]),$$

ma ci sono casi (piuttosto patologici) in cui non c'è uguaglianza.

Definizione Se accade che $I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b])$, allora si dice che $f(x)$ è integrabile (secondo RIEMANN) e si pone

$$\int_a^b f(x) dx = I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b]).$$

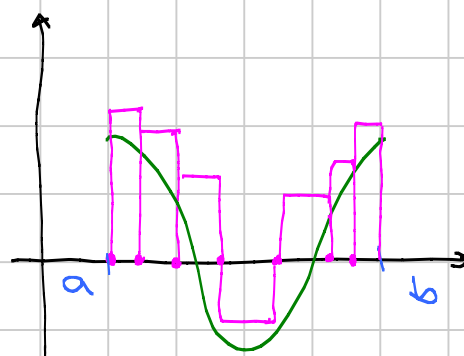
Somme di Riemann (inferiori e superiori) sono le due approssimanti dall'alto e dal basso introdotte nel caso generale della definizione.

— o — o —

Osservazione Se $f(x)$ non è positiva, allora occhio a come sono fatte le somme di Riemann.

Non è detto che

somma di Riemann superiore = contiene la parte di pravo di cui vogliamo fare l'area.



esempio di somma di Riemann superiore