

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 061

Titolo nota

11/12/2010

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Caso con centro
in $x_0 = 0$.

Taylor con resto di Peano

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

↑
resto di Peano

Brutalmente: $f(x) - P_n(x) = o(x^n)$, quindi se approssimo $f(x)$ con $P_n(x)$ commetto un errore piccolo nel senso che è $o(x^n)$.

o piccolo è una informazione al limite, ma per $x \neq 0$ non dice nulla.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Taylor - Lagrange

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove c è un p.to tra 0 e x .

↑
resto di Lagrange

Ovviamente non so chi è c , ma spesso non serve.

Esempio 1 Voglio calcolare $\sin \frac{1}{10}$ a mano.

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \dots \quad \text{Al posto di } x \text{ metto } \frac{1}{10}. \text{ Calcolo}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{10} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000} + \text{errore} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \text{errore} \\ &= \frac{599}{6000} + \text{errore} \end{aligned}$$

Domanda: se dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{589}{6000}$, quale errore commetto?

Uso Taylor-Lagrange con $n=4$. Ho che

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

$$\text{quindi } |\text{errore}| = \frac{|f^{(5)}(c)|}{5!}x^5 = \frac{|\cos c|}{5!}x^5$$

p.to misterioso

$$\text{Con } x = \frac{1}{10} \text{ ottengo } |\text{errore}| = \frac{|\cos c|}{5!} \frac{1}{10^5} \leq \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{1,2 \cdot 10^7} = \frac{1}{12.000.000}$$

Se dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{589}{6000}$ commetto un errore

più piccolo di 10^{-7} . Riprova: $\frac{589}{6000} = 0,09983333$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}$$

↑ errore di 1 sulla 7^a cifra decimale.

— 0 — 0 —
 $\frac{1}{10}$

Esempio 2 Voglio calcolare $e^{\frac{1}{10}}$. Uso Taylor con $n=4$.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \text{errore}$$

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} + \frac{1}{240000} + \text{errore}$$

$$= \frac{240.000 + 24.000 + 1.200 + 40 + 1}{240.000} + \text{errore} = \frac{265.241}{240.000} + \text{errore}$$

Per Taylor-Lagrange ho che

$$|\text{errore}| \leq \frac{|f^{(5)}(c)|}{5!}x^5 \leq \frac{e^c}{120 \cdot 10^5} = \frac{e^c}{1,2 \cdot 10^7} \leq \frac{e}{1,2 \cdot 10^7}$$

— 1 — 1 — 1 —
 0 c $\frac{1}{10}$

$$\text{Riprova: } \frac{265.241}{240.000} = 1,1051708$$

$$e^{\frac{1}{10}} = 1,105170\boxed{8}$$

↑ errore di 1 sulla settima cifra.

Esempio 3 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1° modo: studiare $f(x) = e^x - 1 - x$ (fatto a suo tempo)

2° modo: Taylor-Lagrange con $n=1$.

$$e^x = 1 + x + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2 = 1 + x + \boxed{\frac{e^c}{2!} x^2} \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

≥ 0

Esempio 4 Dimostrare che $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$ per ogni $x \geq 0$

1° modo: studio la funzione differenza (fine per esercizio...)

2° modo: Taylor-Lagrange con $n=2$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^c}{3!} x^3$$

Per $x \geq 0$ ho che il resto è ≥ 0 , quindi se lo tolgo ottengo qualcosa di più piccolo, quindi $e^x \geq 1+x+\frac{1}{2}x^2$.

Per $x \leq 0$ ho che il resto è ≤ 0 , quindi tutto è girato e $e^x \leq 1+x+\frac{1}{2}x^2$.

Esempio 5 $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ per ogni $x \geq 0$

Taylor-Lagrange con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{24} x^4 = x - \frac{1}{6}x^3 + \boxed{\frac{\sin c}{24} x^4}$$

RESTO

Il segno del resto dipende da $\sin c$.

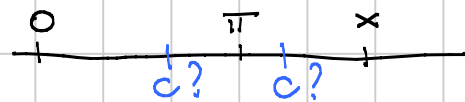
Supponiamo che $0 \leq x \leq \pi$. Allora anche

$0 \leq c \leq \pi$, quindi $\sin c \geq 0$, quindi resto ≥ 0 , quindi

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3 \quad \text{vale per lo meno per ogni } x \in [0, \pi]$$

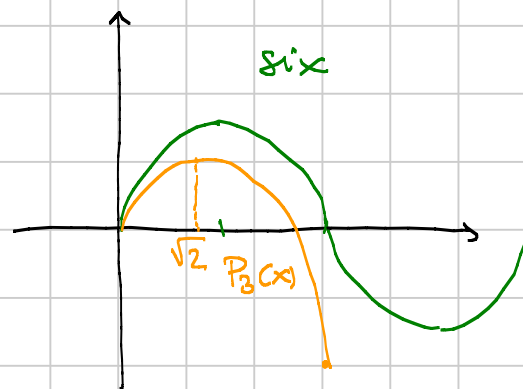


Dopo π , la situazione è
quindi non so se c sta in una zona
con $\sin c > 0$ o $\sin c < 0$.



In π , quanto vale il polinomio?

$$\pi - \frac{1}{6}\pi^3 < \pi - \frac{27}{6} < -1$$



Voglio dire che per $x \geq \pi$ ho che il polinomio
sta sotto -1 . Basta vedere che $P_3(\pi) < -1$ e poi è decrescente
perché

$$P_3'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < 0 \text{ per } x \geq \pi$$

Conclusione: $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ per $x \in [0, \pi]$ per Taylor-Lagrange

Per $x \geq \pi$ ho che $\sin x \geq -1 \geq x - \frac{1}{6}x^3$. Ma allora

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3 \text{ per ogni } x \geq 0$$

Per $x \leq 0$ sono tutte funzioni dispari, quindi si girano i segni.
— 0 — 0 —