

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 060

Titolo nota

11/12/2010

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \quad a_1 = \frac{1}{2}$

Si poteva usare il criterio del rapporto? Proviamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2}{n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{n} \quad \text{per il momento non posso dire nulla.}$$

Però, se al pto (i) avessi dimostrato che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$, allora avrei che

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

da questo dedurrei che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$.

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$ (inclusione semplice)

(ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$ per criterio rapporto.
— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \quad a_1 = 2$

Esperimenti: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{a_1^2}{1} = 4$, $a_3 = \frac{4^2}{2} = 8$, $a_4 = \frac{8^2}{3} = \frac{64}{3} = 21, \dots$

Idea: $a_n \rightarrow +\infty$. Si potrebbe provare con la monotonia, ma fallisce (provare per esercizio).

PIANO (i) $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow +\infty$ (Banale confronto dato pto (i))

Dim. (i) Inclusione $n \geq 1$ Banale $a_1 \geq 2^1$, $2 \geq 2$.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 2^n$ Tesi: $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$

Dim. Ric. $\downarrow$ $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n}$ Ipotesi $\downarrow$ 2^{2n} Spero $\downarrow$ 2^{n+1}

Controllo la speranza: $\frac{2^{2n}}{n} \geq 2^{n+1}$, $2^{2n} \geq 2 \cdot 2^n \cdot n$, cioè

$2^{n-1} \geq n$ e questa si dimostra a sua volta o per induzione o usando Bernoulli

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n.$$

$$(1+x)^k \geq 1 + k \cdot x$$

— 0 — 0 —

Osservazione: supponiamo di voler dimostrare che $a_n \geq n$ per ogni $n \geq 1$ che è molto meno di quanto dimostrato prima...

Nel passaggio induttivo abbiamo

Ipotesi: $a_n \geq n$ Tesi: $a_{n+1} \geq n+1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n \text{ e non } n+1, \text{ quindi NON riesce.}$$

Provo cosa sarebbe successo con $a_n \geq n^2$ per ogni $n \geq 1$...

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{n^4}{n} = n^3 \overset{\text{spero}}{\geq} (n+1)^2$$

La speranza è falsa per $n=1$, per $n=2$, ma da 3 in poi sembra vera. Quindi si tratta di fare a mano POCHI casi iniziali.

— 0 — 0 —

Esempio 3 $a_{n+1} = 7 + \frac{5n^5}{2^n} a_n$ $a_1 = 2010$

Esperimenti: in pochi passaggi diventa enorme (OVERFLOW).

E infatti $a_n \rightarrow 7$!!!

IDEA DI PIANO: Limitatezza + carabinieri (i) $0 \leq a_n \leq M$ ostro $\forall n \geq 1$
(ii) $a_n \rightarrow 7$

Osservazione: $\frac{5n^5}{2^n} \rightarrow 0$, quindi definitivamente $\frac{5n^5}{2^n} \leq \frac{1}{2}$

Cosa vuol dire definitivamente? Vuol dire che vale per ogni $n \geq n_0$ fissato

PIANO

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\forall n \geq n_0$$

$$(ii) \quad a_n \rightarrow 7 \quad (\text{Banale dato (i)})$$

Dim (i) Induzione a partire da n_0 . **$n=n_0$** banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq a_{n_0}$ Tesi: $a_{n+1} \leq a_{n_0}$

Dim. $a_{n+1} = 7 + \frac{5n^5}{2^n} a_n \leq 7 + \frac{1}{2} a_n \leq 7 + \frac{1}{2} a_{n_0} \leq a_{n_0}$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ uso defn. di n_0 $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

La speranza è: $7 + \frac{1}{2} a_{n_0} \leq a_{n_0}$, vero $\Leftrightarrow a_{n_0} \geq 14$.

Per sistemare questo dettaglio, cambio leggermente il pto (i) mettendo

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq a_{n_0} + 14 \quad \forall n \geq n_0$$

Il caso $n=n_0$ è ancora più banale: $a_{n_0} \leq a_{n_0} + 14$...

Nel passaggio induttivo troviamo

$$a_{n+1} \leq 7 + \frac{1}{2} a_n \leq 7 + \frac{1}{2} (a_{n_0} + 14) = 7 + \frac{a_{n_0}}{2} + 7 = \frac{a_{n_0}}{2} + 14 \leq a_{n_0} + 14$$

$\uparrow$ uso nuova ipotesi

Mettendo insieme ho che $a_{n+1} \leq a_{n_0} + 14$, che è la nuova tesi induttiva.

— 0 — 0 —

Esempio 4 $a_{n+1} = 5 + \frac{2010 a_n}{\sqrt{n+3}} \quad a_0 = 2010$

In questo caso $a_n \rightarrow 5$.

PIANO 1 Fisso n_0 tale che $\frac{2010}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$. Si trova

$$4020 \leq \sqrt{n+3} \quad \text{cioè} \quad n+3 \geq 4020^2, \quad n \geq 4020^2 - 3 = n_0$$

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq a_{n_0} + 5 \quad \forall n \geq n_0 = 4020^2 - 3 \quad (\text{come sopra})$$

$$(ii) \quad a_n \rightarrow 5 \quad (\text{Carabinieri})$$

PIANO 2) Monotonia!!!!

Supponiamo che per un certo valore di n si abbia

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Dico che da lì in poi è monotona decrescente. Dato meglio:
se $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$.

Dim.: riduzione per $n \geq n_0$. Il caso $n_0 = n$ è l'ipotesi.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{Dim. } a_{n+2} &= 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+4}} a_{n+1} \leq 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+4}} a_n \leq 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+3}} a_n \\ &\quad \uparrow \text{uso } a_{n+1} \leq a_n \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

quindi ho ottenuto la tesi.

Resta da dimostrare che prima o poi a_n decresce almeno una volta.

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow 5 + \frac{2010}{\sqrt{n+3}} a_n \leq a_n \Leftrightarrow a_n \left(1 - \frac{2010}{\sqrt{n+3}} \right) \geq 5$$

tende a 1 per $n \rightarrow +\infty$

Se a_n arriva sotto 20, essendo partito da 2010 vuol dire che almeno una volta ha fatto un passaggio decrescente. Altrimenti sta sopra 2010 sempre, quindi prima o poi la disuguaglianza è vera.

PIANO (i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$

(ii-a) esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$

(ii-b) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 5$.