

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 059

Titolo nota

11/12/2010

Esempio 1

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3}$$

$$a_0 = 2010$$

Congettura: $a_n \rightarrow 2$.

Tentativo: proviamo a vedere se a_n può essere monotona.

Se voglio dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$, devo dimostrare che

$$\frac{a_n + 2n}{n+3} \leq a_n, \text{ cioè } a_n + 2n \leq n a_n + 3 a_n, \text{ cioè}$$

$$(n+2) a_n \geq 2n, \text{ cioè } a_n \geq \frac{2n}{n+2} \leftarrow \text{se l'ho dimostrato in un p.to precedente ho finito.}$$

PIANO CON MONOTONIA

$$(i) a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$(iv) l = 2$$

Dim (i) Provo per induzione.

$$\boxed{n=0} \quad 2010 \geq 2 \quad \text{Ok.}$$

$$\boxed{n \Rightarrow n+1} \quad \text{Ipotesi: } a_n \geq 2 \quad \text{Tesi: } a_{n+1} \geq 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Dim.} & a_{n+1} & = & \frac{a_n + 2n}{n+3} & \geq & \frac{2 + 2n}{n+3} & \geq 2 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{uso} & & \text{uso} & & \text{spero} & \\ & \text{ricorr.} & & \text{ipotesi} & & & \end{array}$$

$$\text{Controllo la speranza: } \frac{2+2n}{n+3} \stackrel{?}{\geq} 2 \quad 2+2n \geq 2n+6 \quad \text{e}$$

purtroppo è falso !!!!!

$$\text{Cambio il p.to (i) mettendo } a_n \geq \frac{2n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Riprovo per induzione: } n=0 \quad 2010 \geq 0 \quad \text{Ok.}$$

$$\boxed{n \Rightarrow n+1} \quad \text{Ipotesi: } a_n \geq \frac{2n}{n+2}$$

$$\text{Tesi: } a_{n+1} \geq \frac{2n+2}{n+3}$$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \geq \frac{\frac{2n}{n+2} + 2n}{n+3} \geq \frac{2n+2}{n+3}$$

$\uparrow$ Ric. $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

Controllo la speranza: semplificati i denominatori trovo

$$\frac{2n}{n+2} + 2n \geq 2n+2$$

$$2n \geq 2n+4$$

purtroppo è falsa.

— o — o —

Nuovo tentativo: CARABINIERI + MONOTONIA (i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_n \rightarrow 2$

Dim (ii) Se ho dimostrato il pto (i), allora so che

$$\boxed{\frac{2n}{n+3}} \leq \textcircled{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \leq \boxed{\frac{10.000 + 2n}{n+3}}$$

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 2 $\downarrow$ 2

Per i carabinieri ho che $a_{n+1} \rightarrow 2$, quindi anche $a_n \rightarrow 2$.

Dim. (i) Dimostrare che $a_n \geq 0$ è una banale induzione.

Dimostro per induzione che $a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

n=0 banale $2.010 \leq 10.000$

n ⇒ n+1 Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi $a_{n+1} \leq 10.000$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n + 2n}{n+3} \leq \frac{10.000 + 2n}{n+3} \leq 10.000$$

$\uparrow$ uso ric. $\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ spero

Controllo la speranza: $\frac{10.000 + 2n}{n+3} \stackrel{?}{\leq} 10.000,$

$$10.000 + 2n \stackrel{?}{\leq} 10.000n + 30.000, \quad 0 \leq 9.998n + 20.000$$

banalmente vero!

— o — o —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$ $a_1 = \frac{1}{2}$

Idea: $a_n \rightarrow 0$

PIANO MONOTONIA

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim (i) Banale induzione

Dim (ii) 1° modo: ricorrenza + disequazione. Devo dim. $a_{n+1} \leq a_n$, cioè

$$\frac{a_n^2}{n} \leq a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n^2 \leq n a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n(a_n - n) \leq 0$$

Questa è verificata per $a_n \in [0, n]$, ma dal punto (i) so soltanto che $a_n \geq 0$.

Per rimediare basta dimostrare al pto (i) che $0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ed il pto (i) rimane facile. PERÒ BISOGNA RIMEDIARE

2° modo: induzione. $n=0$ Devo dim. che $a_2 \leq a_1$, ma $a_2 = \frac{a_1^2}{1} = \frac{1}{4}$ quindi resta $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ che è vera.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$

Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Dim.} & a_{n+2} & = & \frac{a_{n+1}^2}{n+1} & \leq & \frac{a_n^2}{n+1} & \leq & \frac{a_n^2}{n} & = & a_{n+1} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Uso} & & \text{Uso} & & \text{Demon.} & & \text{Uso} & & \\ & \text{ricorrenza} & & \text{ipotesi +} & & \text{+ piccolo} & & \text{ricorrenza} & & \\ & & & \text{p.to (i) per} & & & & & & \\ & & & \text{poter fare il } \square & & & & & & \end{array}$$

Mettendo insieme 1° e ultimo termine ho la tesi.

Dim (iii) (i) + (ii) + teo. succ. monotone.

Dim. (iv) Passo al limite

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{a_n^2}{n} \quad \left[= \frac{0^2}{+\infty} \right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\quad 0 \quad} & \underline{\quad 0 \quad} & = \underline{\quad 0 \quad} \end{array}$$

PIANO CARABINIERI

(i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow 0$

Supponiamo di dim. (i) per induzione... arriviamo a

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{10.000^2}{n} \leq 10.000$$

↑
sporo

questo è vero per ogni
 $n \geq 10.000$, e bisogna
 controllare 10.000 passi base---

Molto meglio: (i) $0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(ii) \quad a_n \rightarrow 0$$

Dim. (i) $a_n \geq 0$ è una banale induzione. Sempre per induzione dimostro che $a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$.

$n \geq 1$ base

$n \Rightarrow n+1$ Hipotesis: $a_n \leq 1$ Tesis: $a_{n+1} \leq 1$

Dom. $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\uparrow$ Ric. $\uparrow$ uso ipotesi e il fatto che $a_n \geq 0$.

$\leq \frac{1}{1} = 1$ $\uparrow$ Dom. + piccolo

Dim (ii) Dal p.to ci) otteniamo che
Solito finale con i carabinieri.

$$0 \leq a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Domanda: quanto velocemente $a_n \rightarrow 0$? Ad esempio $\sum a_n < +\infty$?

Applico rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \frac{a_n}{n} \left[= \frac{0}{+\infty} \right] \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Ribancio: $\sum \underbrace{n! a_n}_{bn}$ converge? (sì) [$a_n \rightarrow 0$ molto + veloce di $\frac{1}{n!}$]

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)! a_{n+1}}{n! a_n} = (n+1) \frac{a_n^2}{n} \cdot \frac{1}{a_n} = \boxed{\frac{n+1}{n}} \boxed{a_n} \rightarrow 0$$