

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 058

Titolo nota

11/12/2010

SUCCESIONI PER RICORRENZA NON AUTONOME

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ $a_1 = 2010$
rende la successione non autonoma.

[Oss.: in questo si può trovare anche la formula esplicita (esercizio)].

$$a_1 = 2010, \quad a_2 = \frac{2010}{\sqrt{1}} = 2010, \quad a_3 = \frac{2010}{\sqrt{2}}, \quad a_4 = \frac{2010}{\sqrt{2}\sqrt{3}}, \dots$$

Idea: a_n decresce e $a_n \rightarrow 0$.

PIANO 1: MONOTONIA

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim (i) Induzione banalissima.

Dim. (ii) Ricorrenza + disuguaglianza. Devo dim. $a_{n+1} \leq a_n$, cioè

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n \leq \sqrt{n} a_n, \quad \text{cioè} \quad \underbrace{(\sqrt{n}-1)}_{\geq 0} \underbrace{a_n}_{\geq 0} \geq 0, \quad \text{quindi ok}$$

↑ ho usato p.to (i)

Dim. (iii) Per il p.to (ii) a_n è debolmente decrescente.

Per il p.to (i) a_n è inferiormente limitata.

Per il teo. delle succ. monotone ho che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Dim. (iv) Passo ricorrenza al limite

N.B.: ho usato che so già che $l \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a_{n+1}} = \boxed{\frac{a_n}{\sqrt{n}}} = \left[\frac{l}{+\infty} \right]$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $l = 0$

— 0 — 0 —

PIANO 2: RAPPORTO

(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (banale inclusione)

(ii) $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (ii) Grazie al p.to (i) posso applicare il criterio del rapporto.

Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{a_n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0.$$

Oss. È importante sapere da subito che $a_n > 0$ ← stretto.
— 0 — 0 —

PIANO 3: LIMITATEZZA + CARABINIERI

(i) $0 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (i) La disuguaglianza $a_n \geq 0$ è la solita inclusione banale.

La disuguaglianza $a_n \leq 10.000$ quasi pure

$n=1$ $a_1 \leq 10.000$, cioè $2010 \leq 10.000$ ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$\text{Dim.: } a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{1}} = 10.000$$

↑ ipotesi moltiplicata per $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ↑ Denom. + piccolo

Mettendo insieme il 1° e l'ultimo termine ho la tesi.

Dim. (ii) Dal p.to (i) so che $0 \leq a_n \leq 10.000$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi, dividendo per $\sqrt{n}$, ottengo

$$0 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{10.000}{\sqrt{n}}, \text{ cioè } \boxed{0} \leq \boxed{a_{n+1}} \leq \boxed{\frac{10.000}{\sqrt{n}}}$$

↓ ↓ ↓
0 0 0

In questo modo ho dimostrato che $a_{n+1} \rightarrow 0$.

Ma allora (sottosucc. finita) anche $a_n \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan(na_n) + \sin n!}{n+3}$$

$$a_0 = 2010$$

PIANO: MONOTONIA + CARABINIERI

$$(i) -10.000 \leq a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) a_n \rightarrow 0.$$

Dim (ii) Supponiamo di aver dimostrato il p.to (i). Allora

$$\frac{-20.000 - \frac{\pi}{2} - 1}{n+3} \leq a_{n+1} \leq \frac{20.000 + \frac{\pi}{2} + 1}{n+3}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

Per i carabinieri ho che $a_{n+1} \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow 0$ per il solito motivo.

Dim. (i) È equivalente a dimostrare che $|a_n| \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Lo faccio per induzione.

$n=0$ Diventa $|2.010| \leq 10.000$, ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $|a_n| \leq 10.000$ Tesi: $|a_{n+1}| \leq 10.000$

uso MC

Dim.: $|a_{n+1}| \stackrel{\text{uso MC}}{=} \left| \frac{2a_n + \arctan(na_n) + \sin n!}{n+3} \right|$

(Pecorso) $\leq \frac{2|a_n| + |\arctan(na_n)| + |\sin n!|}{n+3}$

$$\leq \frac{20.000 + \frac{\pi}{2} + 1}{n+3} \leq \frac{30.000}{3} = 10.000$$

Num. + grande
Denom. + piccolo

Mettendo insieme 1° e ultimo termine ottengo la tesi.

Variante $a_{n+1} = \frac{2a_n + \sin n!}{n+1}$

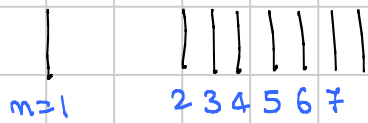
$$a_0 = 2010$$

Quando devo dimostrare il passaggio induttivo mi ritrovo

questi, ma non è vero $\forall n$

$$|a_{n+1}| \leq \frac{2|a_n| + |\sin n!|}{n+1} \leq \frac{20.000 + 1}{n+1} \leq 10.000$$

La disuguaglianza che vorrei è vera solo per $n \geq 2$, quindi il passaggio induttivo, cioè il meccanismo di caduta vale solo da $n=2$ in poi:



Quindi devo usare come passo base $n=1$ ed $n=2$.

Se $n=1$ è banale, bisogna fare $n=2$, cioè dimostrare che $|a_2| \leq 10.000$

Questo è vero perché

$$a_2 = \frac{2a_1 + \sin 1}{2} = \frac{4.020 + \sin 1}{2} \leq 10.000$$

$$a_2 \geq 0 \geq -10.000$$

Oss. In quest'ultimo esempio non sarebbe vero che $|a_n| \leq 2.010$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

È stato quindi importante fissare una limitazione come 10.000 che fosse abbondante.