

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 057

Titolo nota

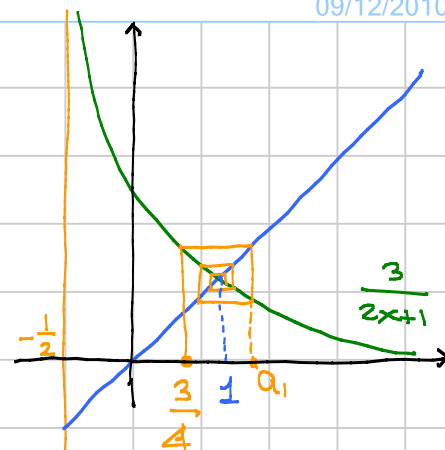
09/12/2010

Esempio $a_{n+1} = \frac{3}{2a_n+1}$ $a_0 = \frac{3}{4}$

Risolvere $\frac{3}{2x+1} = x$, $3 = 2x^2 + x$
 $2x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ spiraleggiando.



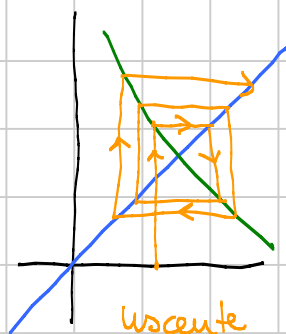
PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = |a_n - 1|$

(i) $\frac{3}{4} \leq a_n \leq \frac{6}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{4}{5} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_1 = \frac{3}{2 \cdot \frac{3}{4} + 1} = \frac{3}{\frac{3}{2} + 1} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n d_0$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow 1$.



Come trovare il numero che serve al p.to (ii).

Dim (ii) 1° modo: direttamente

uso ric.

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| \stackrel{\text{uso ric.}}{=} \left| \frac{3}{2a_n+1} - 1 \right| = \left| \frac{3 - 2a_n - 1}{2a_n+1} \right| = \left| \frac{2 - 2a_n}{2a_n+1} \right|$$

$$= \frac{2|1-a_n|}{|2a_n+1|} = \frac{2}{|2a_n+1|} |a_n-1|$$

$$= \frac{2}{|2a_n+1|} d_n \leq \frac{2}{2 \cdot \frac{3}{4} + 1} d_n = \frac{4}{5} d_n$$

Ho messo il denominatore più piccolo possibile corrispondente

a $a_n = \frac{3}{4}$ (uso p.to (i))

Questo modo funziona perché sono riuscito a fare conti algebrici!

2° modo: uso la Lipschitzianità di $f(x) = \frac{3}{2x+1}$. Calcolo

$f'(x) = -\frac{3 \cdot 2}{(2x+1)^2}$. Qual è la costante di Lipschitz di $f(x)$ nell'intervallo $[\frac{3}{4}, \frac{6}{5}]$ (quello dato dal p.to ci)?

$$\max \{ |f'(x)| : x \in [\frac{3}{4}, \frac{6}{5}] \} = \max \left\{ \frac{6}{(2x+1)^2} : x \in [\frac{3}{4}, \frac{6}{5}] \right\}$$
$$= \frac{6}{(2 \cdot \frac{3}{4} + 1)^2} = \frac{6}{\frac{25}{4}} = \frac{24}{25}$$

Quindi $f(x)$ è Lip. nell'intervallo con costante $\frac{24}{25}$. Allora

$$d_{n+1} = \underbrace{|a_{n+1} - 1|}_{= |f(a_n) - f(1)|} \leq \frac{24}{25} |a_n - 1| = \frac{24}{25} d_n$$

Quindi nel secondo modo ottengo $d_{n+1} \leq \frac{24}{25} d_n$, che va ancora bene perché la costante è < 1 .

Dim (cii) e (iv) Seguono come sempre.

Dim (i) Devo dimostrare che $\frac{3}{4} \leq a_n \leq \frac{6}{5}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Induzione: $n=0$ banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $\frac{3}{4} \leq a_n \leq \frac{6}{5}$ Tesi: $\frac{3}{4} \leq a_{n+1} \leq \frac{6}{5}$

Devo risolvere $\frac{3}{4} \leq a_{n+1}$, cioè $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2a_n+1}$, cioè $2a_n+1 \leq 4$,

(posso moltiplicare perché so per ipotesi che denominatore > 0)

cioè $2a_n \leq 3$, cioè $a_n \leq \frac{3}{2}$. Sapendo per ipotesi che $a_n \leq \frac{6}{5}$

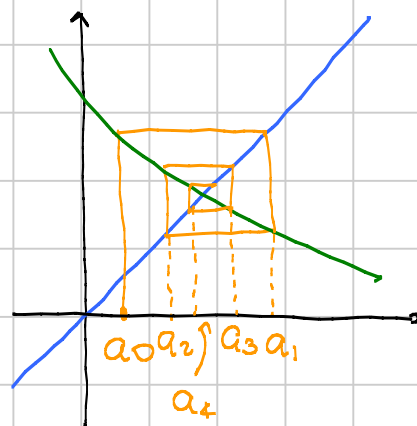
ottengo gratis che $a_n \leq \frac{3}{2}$ cioè la 1ª disug. è verificata.

Devo risolvere anche $a_{n+1} \leq \frac{6}{5}$, cioè $\frac{3}{2a_n+1} \leq \frac{6}{5}$, cioè $5 \leq 4a_n+2$,
cioè $4a_n \geq 3$, cioè $a_n \geq \frac{3}{4}$, che è proprio compreso
nell'ipotesi.

— o — o —

Idea: An non è monotona, MA

- a_{2n} è monotona crescente e
- a_{2n+1} è monotona decrescente



PIANO CON LE 2 SOTTOSEQUENZE

$$(i) \quad \frac{3}{4} \leq a_{2n} \leq 1, \quad 1 \leq a_{2n+1} \leq \frac{6}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad a_{2n+2} \geq a_{2n}, \quad a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad l = m = 1.$$

Dim. (iii) (i) + (ii) + teorema successioni monotone (fatto su a_{2n} e a_{2n+1})

Dim. (iv) Passare al limite nella ricorrenza. La scrivo sui pari e sui dispari

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{3}{2a_{2n} + 1} \\ \downarrow \\ m &= \frac{3}{2l + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{3}{2a_{2n+1} + 1} \\ \downarrow \\ l &= \frac{3}{2m + 1} \end{aligned}$$

Invece di avere un'equazione ho un sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} m = \frac{3}{2l+1} \\ l = \frac{3}{2m+1} \end{cases} \quad \begin{cases} 2ml + m = 3 \\ 2ml + l = 3 \end{cases}$$

sottraggo e ottengo $m = l$.

sostituendo trovo

$$2l^2 + l = 3, \text{ cioè } 2l^2 + l - 3 = 0,$$

$$\text{cioè } l = 1 \text{ oppure } l = -\frac{3}{2}$$

Ma $l = -\frac{3}{2}$ è incompatibile con il p.to (i).

"Dim" p.ti (i) e (ii) $a_0 = \frac{3}{4}, a_1 = \frac{6}{5}, a_2 = \frac{3}{2 \cdot \frac{6}{5} + 1} = \frac{3}{\frac{12}{5} + 1} = \frac{15}{17}$

Ho ottenuto che $a_0 \leq a_2 \leq 1 \quad \left(\frac{3}{4} \leq \frac{15}{17} \leq 1 \right)$

Applico $f(x)$, che è decrescente in quella zona, quindi inverto i versi

$$a_0 \leq a_2 \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} f(a_0) & \geq & f(a_2) \geq f(1) \\ a_1 & \geq & a_3 \geq 1 \end{array}$$

Riapplico $f(x)$ e invertito nuovamente:

$$a_1 \geq a_3 \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} f(a_1) & \leq & f(a_3) \leq f(1) \\ a_2 & \leq & a_4 \leq 1 \end{array}$$

Al passaggio successivo ho

$$\begin{array}{ccc} f(a_2) & \geq & f(a_4) \geq f(1) \\ a_3 & \geq & a_5 \geq 1 \end{array}$$

Continuando in questo modo otterremo decrescenza di a_{2m+1} e
crescenza di a_{2m} (comprese le limitazioni)

— o — o —