

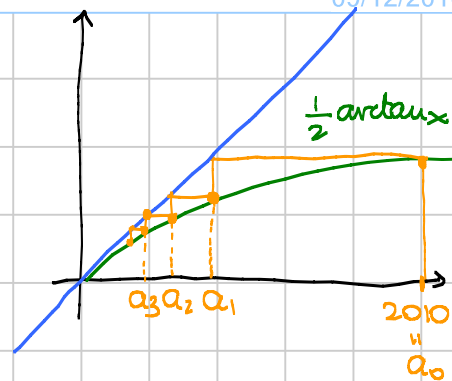
ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 056

Titolo nota

09/12/2010

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n$ $a_0 = 2010$

Idea: $a_n \rightarrow 0$ decrescendo.



PIANO CON MONOTONIA

- (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 0$

Dim. (i) Per induzione. (Tranquillo)

Dim. (ii) 1° modo: riconducita + disequazione

$a_{n+1} \leq a_n$ vuol dire $\frac{1}{2} \arctan a_n \leq a_n$. Si ottiene così la diseq. $\frac{1}{2} \arctan x \leq x$ che si risolve con uno studio di funzione e ha come soluzione $x \geq 0$, cioè $a_n \geq 0$ che è vero per il p.to (i).
(Nota Bene: la disequazione l'abbiamo già risolta per poter sovrapporre correttamente i grafici).

Volendo si poteva anche usare la disug. classica

$$\frac{1}{2} \arctan x \leq \frac{1}{2} x \leq x$$

↑
Disug. vera
 $\forall x \geq 0$

2° modo: induzione + applico f.

$n=0$ $a_1 \leq a_0$ vero perché $a_1 = \frac{1}{2} \arctan 2010 \leq \frac{\pi}{4} \leq 2010 = a_0$

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Applico $\frac{1}{2} \arctan x$ che è una funzione stretta. crescente. Ottengo

$$\frac{1}{2} \arctan a_{n+1} \leq \frac{1}{2} \arctan a_n$$

" "

$$a_{n+2} \leq a_{n+1}$$

Abbiamo ottenuto $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ che è proprio la tesi del passag. indutt.

Dim (iii) (i) + (ii) + lemmi successioni monotone.

Dim (iv) Passaggio al limite nella ricorrenza + equazione

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2} \arctan a_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \frac{1}{2} \arctan l \end{array}$$

Ci siamo ridotti all'equazione $x = \frac{1}{2} \arctan x$, che dallo studio di funzione ha come soluzione solo $x=0$.

PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = |a_n - 0| = |a_n|$

(i) non serve

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow 0$.

Osservazione fondamentale: la funzione $f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$ è Lipschitziana con costante $\frac{1}{2}$ su tutto $\mathbb{R}$, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Si dimostra con Lagrange:

$$f(x) - f(y) = (x-y) \cdot f'(c) = (x-y) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1+c^2} \quad (c \text{ tra } x \text{ e } y)$$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1+c^2} \leq |x-y| \frac{1}{2}$$

Dim. (ii) $d_{n+1} = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$

(uso Lip.) $\rightarrow \leq \frac{1}{2} |a_n - 0| = \frac{1}{2} d_n$.

Dim (iii): Facile induzione a partire da (ii)

Dim. (iv) $\boxed{0} \leq \boxed{d_n} \leq \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n d_0}$ $\rightarrow$ È fondamentale in questo passo che $\frac{1}{2} < 1$.

Osservazione Sia a_n la successione appena costruita. Come si comporta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

La condizione necessaria c'è, e la serie ha i termini di segno costante. Applico il criterio del rapporto (prima però dimostro per induzione che $a_n > 0$ (stretto) per ogni $n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\arctan a_n}{a_n} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{uso ricom.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{2} < 1$$

$x = a_n$
e $a_n \rightarrow 0$
quindi $x \rightarrow 0$

quindi la serie converge. $_0_0_$

Variazione all'esercizio $a_{n+1} = \arctan a_n$ $a_0 = 2010$

Ancora una volta $a_n \rightarrow 0$ decrescendo.

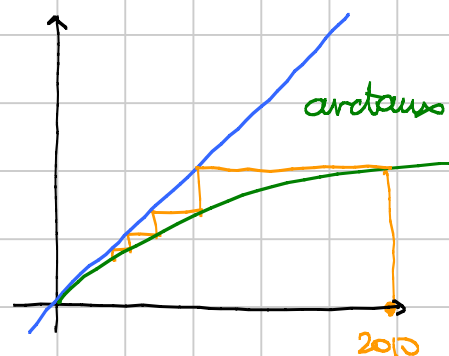
Però:

- il piano con la monotonia funziona allo stesso modo
- nel piano con la distanza la costante al p.to (ci) diventa 1, cioè $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi non si può fare il piano con la distanza.

- nello studio della serie il criterio del rapporto ha come risposta

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$, quindi BOH, e bisogna usare altri strumenti (ESERCIZIO HARD) $_0_0_$

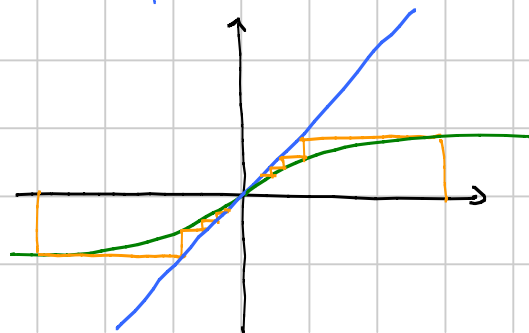


Osservazione $a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n$ $a_0 = \alpha \leftarrow \text{parametro}$

Se faccio il piano con la distanza, funziona allo stesso modo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se faccio il piano con la monotonia,

devo distinguere $\alpha \geq 0$ e $\alpha \leq 0$.

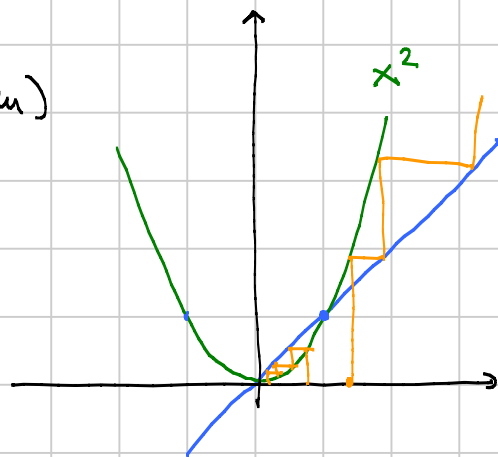


Esempio $a_{n+1} = a_n^2$ $a_0 = \alpha$
 (sottoesercizio: trovare formula esplicita per a_n)

Idea:

- se $\alpha > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$

PIANO (i) $a_n \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 (iv) $l = +\infty$



- se $0 < \alpha < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 (iv) $l = 0$

- se $\alpha = 1$, allora $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi in particolare $a_n \rightarrow 1$.

- se $\alpha < 0$, dopo il primo passaggio diventa $a_1 > 0$, quindi da a_1 in poi ricado nei casi precedenti (uno calcola a_1 e fa il piano a partire da a_1).

Conclusione

$a_n \rightarrow +\infty$ per $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 $a_n \rightarrow 0$ per $\alpha \in (-1, 1)$
 $a_n \rightarrow 1$ per $\alpha \in \{-1, 1\}$.

— 0 — 0 —