

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 055

Titolo nota

07/12/2010

"Verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice"

LIPSCHITZIANITÀ

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che $f(x)$ è Lipschitziana con costante L in A se

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

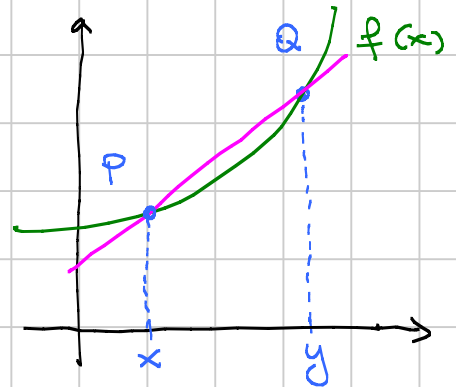
Il più piccolo valore di L che va bene nella disuguaglianza sopra si dice costante di Lipschitz di $f(x)$ in A .

Significato geometrico

Dividendo ottengo $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$, cioè

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

valore assoluto del coeff.
angolare della retta PQ

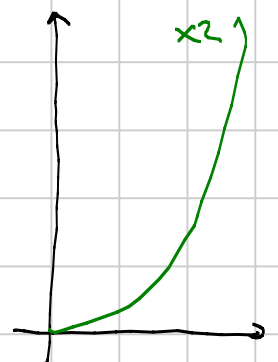


La Lipschitzianità è un controllo sulla pendenza delle rette secanti. Quindi

f Lipschitziana in $A \Leftrightarrow$ il grafico in A ha pendenza limitata

Esempio 1 $f(x) = x^2$ è Lipschitziana? DOVE?

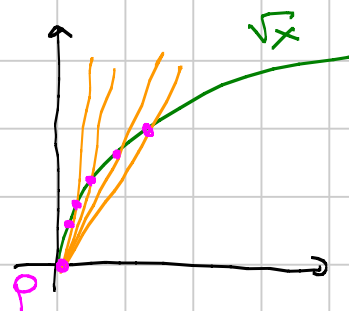
in $[0, +\infty)$ NO! Posso costruire
rette secanti con pendenza altissima
in $[2, 7]$ SÌ! Le pendenze sono
limitate.



Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ è Dip. in $[0,1]$?

NO!

in $[1, +\infty)$ SI! perchè il grafico "spiana".



Teorema Supponiamo che f sia derivabile in A , e che A sia un intervallo, una semiretta, o tutto $\mathbb{R}$.

Allora si ha che

f lipschitziana in $A \Leftrightarrow f'$ limitata in A .

Inoltre la costante di Lipschitz, cioè il migliore L , è proprio $\sup \{ |f'(x)| : x \in A \}$

Dim. Sia $L = \sup \{ |f'(x)| : x \in A \}$. Se f' è limitata, allora $L \in \mathbb{R}$. Dico che

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

Uso LAGRANGE:

$$f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f'(c)$$



Quindi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |x - y| \cdot |f'(c)| \\ &\leq |x - y| \cdot L \end{aligned}$$

In questo modo ho dimostrato "mezzo teorema", cioè il fatto che derivata limitata $\Rightarrow$ Lipschitzianità.

Per la seconda parte, devo assumere che $f(x)$ sia Dip., e dimostrare che la derivata è limitata. Uso la definizione

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|}$$

ma usando la Dip. con $x = x_0 + h$ e $y = x_0$ ottengo che

$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq L |x_0+h - x_0| = L|h|$, ma allora il rapporto incrementale è sempre $\leq L$, quindi il suo limite è $\leq L$ (in valore assoluto).

Esempio 1 Dimostrare che $f(x) = x^2$ è Lipschitziana in $[-4, 22]$.

Basta dimostrare che $f'(x) = 2x$ è limitata in $[-4, 22]$.

1° modo: $f'(x)$ è continua, l'intervallo ha gli estremi, quindi per Weierstrass $f'(x)$ ha max e min nell'intervallo, quindi è limitata

2° modo: direttamente

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [-4, 22] \} = \sup \{ 2|x| : x \in [-4, 22] \} = 44$$

quindi $L = 44$.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x+6}$ è Lipschitziana in $[3, +\infty)$?

Intuitivamente sì. Provo a vedere se la derivata è limitata.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$$

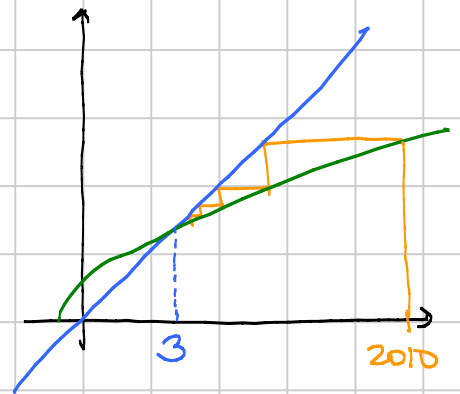
$$\sup \{ |f'(x)| : x \geq 3 \} = \sup \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x+6}} : x \geq 3 \right\} = \frac{1}{6}$$

Quindi ho dimostrato che $f(x) = \sqrt{x+6}$ è Lipschitziana in $[3, +\infty)$ con costante $\frac{1}{6}$.

Studiamo $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $a_0 = 2010$

PIANO CON LA MONOTONIA

- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 3$



PIANO CON LA DISTANZA Pongo $d_n = |a_n - 3|$ e dimo che $d_n \rightarrow 0$.

- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0$
- (iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow 3$.

Dim. (i) Esattamente come nel primo con la monotonia. Si può fare per induzione direttamente oppure applicando $f(x)$.

Dim. (iii) Si dimostra facilmente per induzione a partire da (ii)

$n=0$ $d_0 \leq (\frac{1}{6})^0 d_0$, $d_0 \leq d_0$ ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $d_n \leq (\frac{1}{6})^n d_0$ Tesi: $d_{n+1} \leq (\frac{1}{6})^{n+1} d_0$.

Dim. $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n \leq \frac{1}{6} (\frac{1}{6})^n d_0 = (\frac{1}{6})^{n+1} d_0$

$\uparrow$ uso p.to (ii) $\uparrow$ uso ipotesi induttiva $\uparrow$ Precorso.

Dim. (iv) So che

val. assol. p.to (iii)
 $0 \leq d_n \leq (\frac{1}{6})^n d_0$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

La conclusione è con i carabinieri (è fondamentale che $\frac{1}{6} < 1$)

Dim. (ii) Devo dimostrare che $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

definita, riconvessa
 $d_{n+1} = |a_{n+1} - 3| \stackrel{\downarrow}{=} |f(a_n) - 3|$

3 è il p.to di incontro dei grafici $\rightarrow = |f(a_n) - f(3)|$

$\leq \frac{1}{6} |a_n - 3|$

$= \frac{1}{6} d_n$

— 0 — 0 —

Ora uso che f è Lip. con costante $\frac{1}{6}$ per $x \geq 3$ (so che $a_n \geq 3$ dal p.to (i))