

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 054

Titolo nota

07/12/2010

Esempio $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2$ $a_0 = 1.$ $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$

Vedo che aia tira: $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3, \dots$

Sembra che a_n sia crescente e forse $a_n \rightarrow +\infty$

- PIANO**
- (i) $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim. (i) 1° modo: induzione elementare

$n=0$ $a_0 \geq 1$, cioè $1 \geq 1$ banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 1$ Tesi: $a_{n+1} \geq 1$

Dim. $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2 \geq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \geq 1.$

↑
Ho usato che
 $a_n \geq 1 \Rightarrow \frac{a_n}{2} \geq \frac{1}{2}$
 $a_n \geq 1 \Rightarrow a_n^2 \geq 1$

2° modo: applico f . È sempre per induzione, ma nel passaggio induttivo prendo l'ipotesi $a_n \geq 1$ e applico f (so che $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$). Ottengo

$$\begin{aligned} f(a_n) &\geq f(1) \\ a_{n+1} &\geq \frac{3}{2} \geq 1. \\ &\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \end{aligned}$$

Dim. (ii) 1° modo: riconversione + disuguaglianza Devo dim. che

$a_{n+1} \geq a_n$, cioè $\frac{a_n}{2} + a_n^2 \geq a_n$, cioè $a_n^2 - \frac{a_n}{2} \geq 0.$

Ottengo la diseq. $x(x - \frac{1}{2}) \geq 0$ che ha come soluzione

$x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$, quindi $a_n \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

Dal p.to precedente so che $a_n \geq 1$, quindi di sicuro sta nel secondo pezzo, quindi $a_{n+1} \geq a_n$ è verificata.

Oss. Se il p.to (i) fosse stato $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ora non avrei potuto concludere. Sarebbe invece bastato $a_n \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2° modo: induzione + applico f dim. per induzione che $a_{n+1} \geq a_n$.

$n=0$ $a_1 \geq a_0$, cioè $\frac{3}{2} \geq 1$, Ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \geq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico f (impunemente perché so già che $a_n \geq 1$ e in quella zona $f(x)$ è crescente)

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq a_n &\Rightarrow f(a_{n+1}) \geq f(a_n) \\ &\quad \quad \quad a_{n+2} \geq a_{n+1}, \text{ che è la tesi.} \\ &\quad \quad \quad _ _ _ \end{aligned}$$

Dim. (ii) Dal p.to (ii) so che a_n è debolmente crescente
La limitazione inferiore del p.to (i) non serve a niente
Restano aperte 2 possibilità: $a_n \rightarrow l$ oppure $a_n \rightarrow +\infty$
_ _ _

Dim. (iv) Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite nella ricorrenza

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + a_n^2 \\ \downarrow &\quad \quad \downarrow \\ l &= \frac{l}{2} + l^2 \end{aligned}$$

Otengo la solita equazione $l^2 = \frac{l}{2}$ che ha come soluzioni $l=0$ e $l=\frac{1}{2}$. Entrambe sono incompatibili con il p.to (i).
Essendo esclusi i limiti reali resta solo $l = +\infty$.

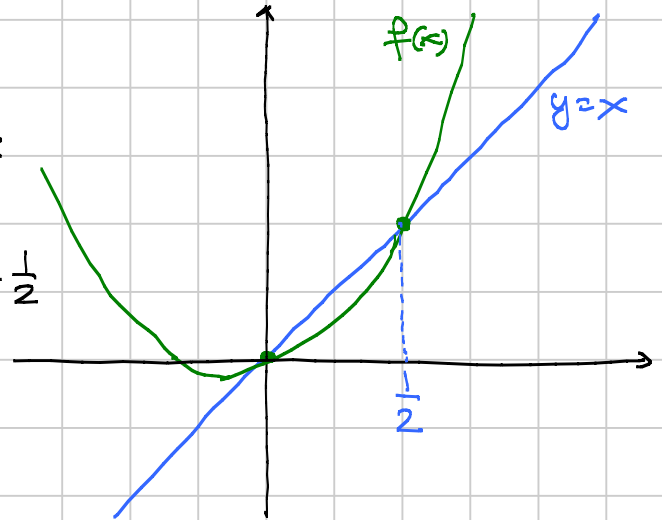
Oss. Un p.to (i) del tipo $a_n \geq \frac{1}{2}$ non andava bene per il p.to (iv)
_ _ _

Interpretazione geometrica Disegno sullo stesso grafico la bisettrice $y = x$ e la funzione $y = f(x) = \frac{x}{2} + x^2$.

Per vedere la posizione relativa dei
2 grafici risolvo $f(x) = x$ e $f(x) \geq x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{2} + x^2 = x \Leftrightarrow x=0 \text{ e } x=\frac{1}{2}$$

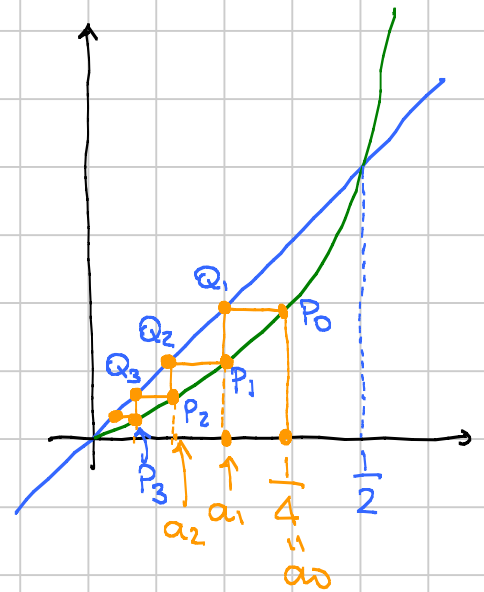
stessa equazione
del pito (cio)



$$f(x) \geq x \Leftrightarrow \frac{x}{2} + x^2 \geq x \quad (\text{disuguaglianza del p.to crit.})$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$$

Suppongo che il dato iniziale sia $a_0 = \frac{1}{4}$. Seguo $\frac{1}{4}$ sull'asse x e procedo con lo slogan



VERTICALE ALLA FUNZIONE
ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE

Scrivo le coordinate dei p.ti

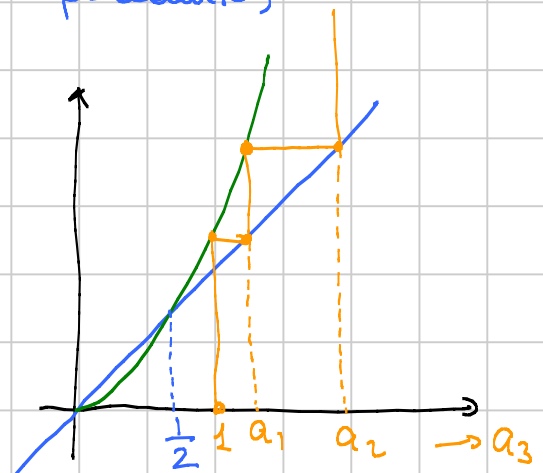
$$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$Q_1 = (a_1, a_1)$ (ha le coordinate uguali e stessa y del precedente)

$$P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2) \quad (\text{stessa } x \text{ del precedente})$$

$$Q_2 = (a_2, a_2)$$

Le coordinate x dei p.ti costruiti con lo slogan sono i termini successivi della succ. per ricorrenza



Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ $a_0 = 2010$

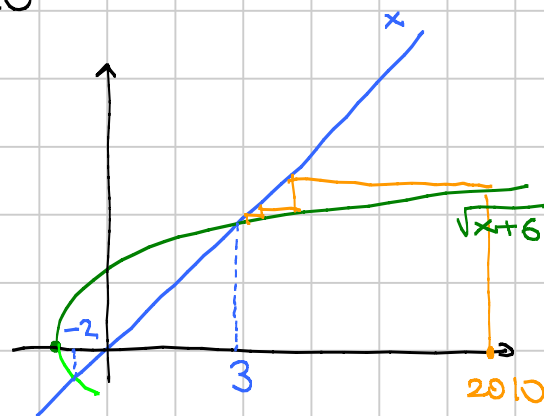
Disegno $y=x$ e $y = \sqrt{x+6}$

Per trovare il p.to d'incontro risolvo

$$x = \sqrt{x+6}$$

$$x^2 = x+6 \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \quad x = \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$



Dal disegno uno si aspetta a_n decrescente e $a_n \rightarrow 3$.

PIANO (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $l = 3$ (passaggio al limite nella ricorrenza + equazione $l = \sqrt{l+6}$ già risolta).

Dim. (ii) Facendo ricorrenza + disequazione si arriva a $\sqrt{x+6} \leq x$, che ha come soluzione $x \geq 3$, cioè $a_n \geq 3$ che è il risultato del p.to (i).

Dim. (i) Induzione + applico f

[$n=0$] $a_0 \geq 3$, cioè $2010 \geq 3$ ok

[$n \Rightarrow n+1$] Ipotesi: $a_n \geq 3$

Applico $f(x)$ che è crescente addirittura per $x \geq -6$

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n+6} &\geq \sqrt{3+6} \\ \text{"} &\quad \text{"} \\ a_{n+1} &\geq 3 \end{aligned}$$

$$f(a_n) \geq f(3)$$

che è la tesi.