

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 053

Titolo nota

07/12/2010

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad a_0 = \alpha$$

$\uparrow$ funzione data $\uparrow$ numero dato

$a_{n+1} = 2a_n + 3$ $a_0 = 1$. Se voglio posso calcolare i successivi:
regola per passare da un termine al successivo

$$a_1 = 2a_0 + 3 = 5$$

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 13$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 29 \quad \text{e così via.}$$

Volendo calcolare a_{2010} bisognerebbe calcolare prima tutti i precedenti. In generale non si riesce a trovare una formula per a_n in funzione di n e non del precedente.

Obiettivo della teoria: rispondere alle solite domande (monotonia? Diverge? comportamento?) senza avere la formula chiusa.

Terminologia: si dice ordine di una succ. per ricorrenza il numero di termini precedenti coinvolti nella formula di passaggio

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 5 \quad \text{ordine 1}$$

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \quad \text{ordine 2: dipende dai 2 termini precedenti}$$

Se la ricorrenza è di ordine k , mi servono k termini iniziali dati per partire con il procedimento.

Una successione per ric. si dice autonoma "se la n compare solo come indice e non nella legge di passaggio".

$$a_{n+1} = 3a_n - 2$$

Autonoma

$$a_{n+1} = 3a_n - \boxed{n}$$

$\uparrow$
non autonoma per colpa di questa n .

Esercizio $a_{n+1} = 3a_n - n$ $a_0 = 1$ Calcolare a_3

$$a_1 = 3a_0 - 0 = 3$$

$\uparrow$
quando calcolo a_1 ho $n=0$

$$a_2 = 3a_1 - 1 = 8$$

$\uparrow$
 $\boxed{n=1}$

$$a_3 = 3a_2 - 2 = 22$$

$\uparrow$
 $\boxed{n=2}$

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + a_n^2$ $a_0 = \frac{1}{4}$

Capire come si comporta questa successione. Provo a calcolare i primi termini: $a_0 = \frac{1}{4}$ $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{2+1}{16} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4}$

$$a_2 = \frac{3}{32} + \frac{9}{256} = \frac{24+9}{256} = \frac{33}{256} < \frac{3}{16}$$

Sembra che a_n sia decrescente e forse tenderà a 0. Lo dimostro mediante un piano.

- PIANO**
- (i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 - (iv) $l = 0$

Se dimostro i vari punti del piano, so che la succ. è monotona decrescente e tende a 0. Ora devo dimostrare di fila i p.ti del piano.

Dim. (iii) Dal p.to (ii) so che a_n è debolmente decrescente
 Dal p.to (i) so che a_n è limitata inferiormente ($a_n \geq 0$)
 Dal teo. delle succ. monotone so che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (ho già escluso 3 comportamenti su 4).

Dim. di (iv) Scrivo la ricorrenza e passo al limite

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{a_n}{2} + a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ l & = & \frac{l}{2} + l^2 \end{array}$$

Otengo una equazione per l . Poiché dal p.to (iii) so che l è reale, posso risolvere l'equazione:

$$2l = l + 2l^2, \quad 2l^2 = l \Rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Però $l = \frac{1}{2}$ è incompatibile con il p.to (i), cioè il fatto che $a_n \leq \frac{1}{4}$.
 Quindi l'unico limite possibile è $l = 0$.

Dim. (i) Dimostro per induzione che $a_n \geq 0$.

$n=0$ $a_0 \geq 0$, cioè $\frac{1}{4} \geq 0$ che è banalmente vera

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \geq 0$ Tesi: $a_{n+1} \geq 0$

Dim.
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2 \geq 0.$$
$$\geq 0 \quad \geq 0$$

Dimostro per induzione che $a_n \leq \frac{1}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$ $a_0 \leq \frac{1}{4}$, cioè $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$, banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq \frac{1}{4}$ Tesi: $a_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

Dim.
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + a_n^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$$

Non va benissimo: ho detto che $a_n \leq \frac{1}{4}$, dunque $a_n^2 \leq \frac{1}{16}$. Questo non è corretto perché non posso fare il $\square$ impunemente consentendo i versi ($-7 \leq \frac{1}{4}$, ma $(-7)^2$ non è $\leq \frac{1}{16}$).

Nel caso in questione posso fare i quadrati impunemente perché so già che $a_n \geq 0$ perché l'ho appena dimostrato.

Dim. (ii) Per dimostrare il p.to (ii) uso ricorrenza + disequazione.

Devo dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Usando la ricorrenza, questo è equivalente a

$$\frac{a_n}{2} + a_n^2 \leq a_n$$

Questo conduce alla disequazione $\frac{x}{2} + x^2 \leq x$, cioè $x^2 - \frac{x}{2} \leq 0$, cioè $x(x - \frac{1}{2}) \leq 0$, la cui soluzione è $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, cioè $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

Dal p.to (i) io so che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$, quindi di sicuro $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, il che dimostra la monotonia.

— 0 — 0 —

Dimostrazione alternativa dei p.ti (i) e (ii).

Considero la funzione $f(x) = \frac{x}{2} + x^2$. Da un veloce studio vedo che è strett. cresc. per $x \geq 0$ (anche un po' prima).



Dim. alternativa p.to (i) Induzione

uzo... bawole

$n \Rightarrow n+1$ Hipotesis : $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ Tesis : $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico f

conosco i versi perché so che f è crescente per $x \geq 0$

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(0) \leq f(a_n) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$$

e questa è proprio la tesi

Dim. alternativa p.to (ii) Induzione

no $a_1 \leq a_0$, cioè $\frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$, banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim.: prendo l'ipotesi $a_{n+1} \leq a_n$, applico f

↓ dopo aver spiegato perché
posso !!!!!

$$\begin{array}{ccc} f(a_{n+1}) & \leq & f(a_n) \\ \text{"} & & \text{"} \\ a_{n+2} & \leq & a_{n+1} \end{array}$$