

DISUGUAGLIANZE CLASSICHE

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \geq 0$$

In tutte vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow x = 0$

$$x \geq \log(1+x) \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3 \quad \forall x \geq 0$$

già fatto

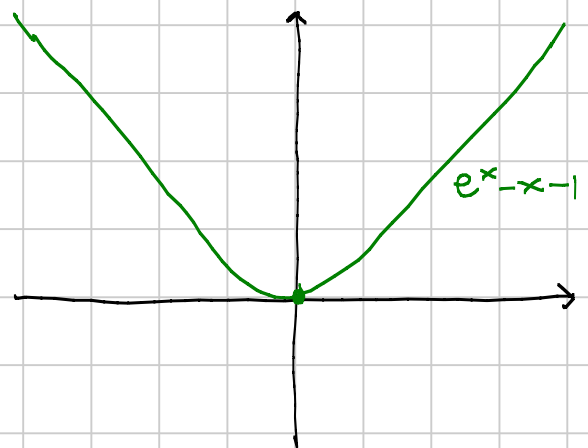
Tutte queste disuguaglianze si possono dimostrare con opportuni studi di funzione

Esempio 1 Dimostrare che $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e vale il segno di uguale $\Leftrightarrow x = 0$.

Studio $f(x) = e^x - x - 1$. Nessuna simmetria, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

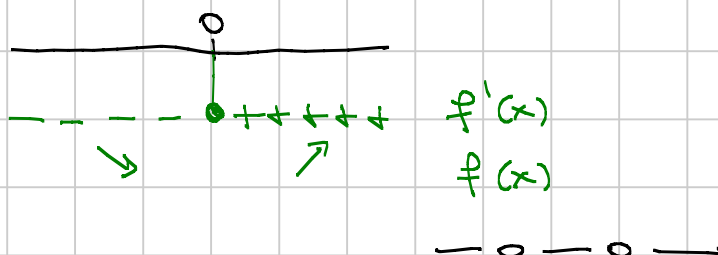
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [e^{-\infty} - (-\infty) - 1] = +\infty = [0 + \infty - 1]$$



Derivata: $f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$



Quindi $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

quindi

$$e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 2 $\sin x \leq x$.

Studio $f(x) = x - \sin x$

Dispari, definita e continua ovunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$f(0) = 0$. Guardo il segno di $f'(x)$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico (cioè non si annulla in un intero intervallo).

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. crescente.

Ora sappiamo che $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$, quindi

$$\sin x < x \quad \text{per } x > 0$$

$$\sin x = x \quad \text{per } x = 0$$

$$\sin x > x \quad \text{per } x < 0$$

Domanda: com'è fatto il grafico di $f(x) = x - \sin x$ vicino a $x=0$?

Guardo Taylor: $f(x) = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

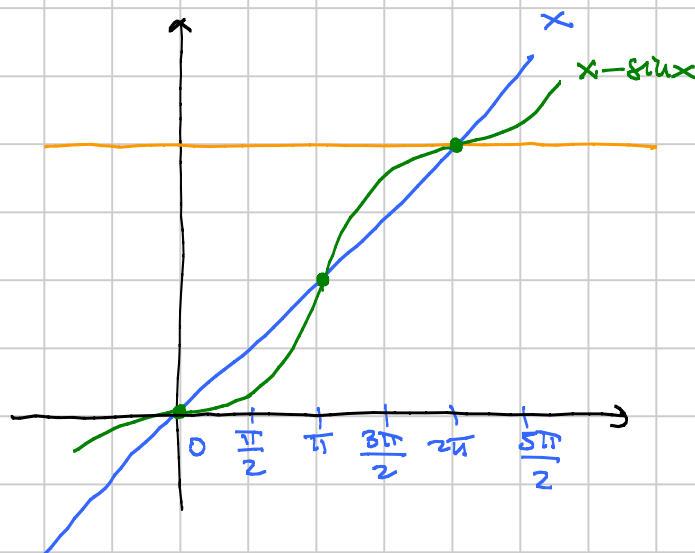
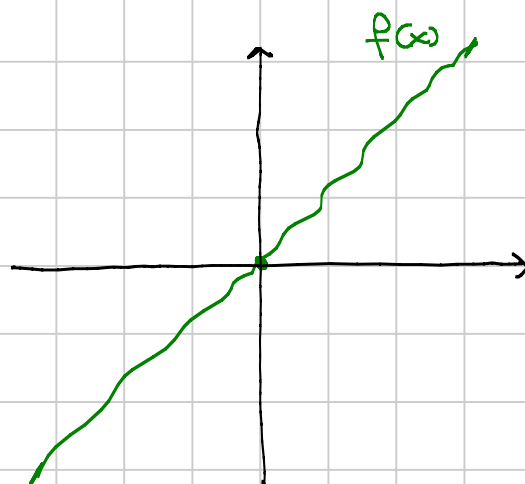
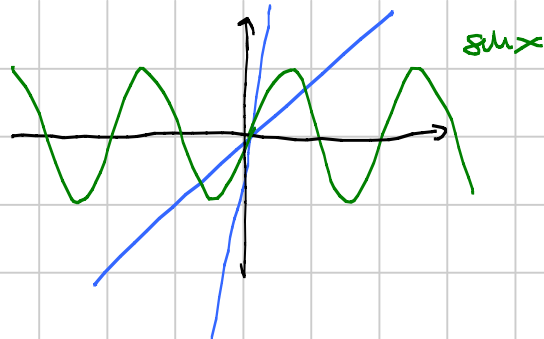
Quindi vicino a $x=0$ la funzione

$f(x)$ si comporta come $\frac{1}{6}x^3$.

Nota bene: $x=0$ è un p.to

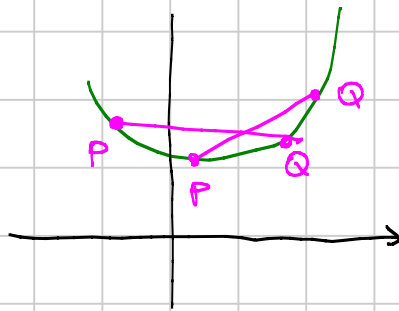
stazionario, cioè tangente

orizzontale.



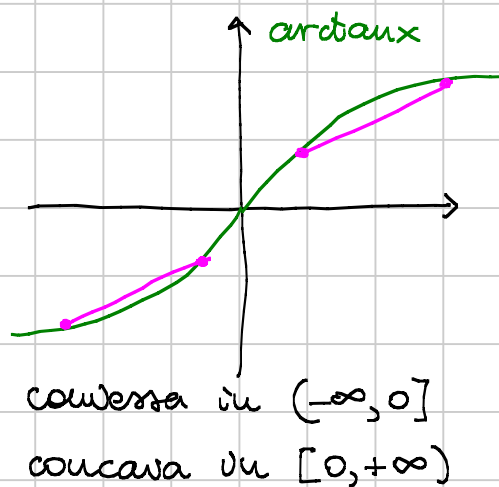
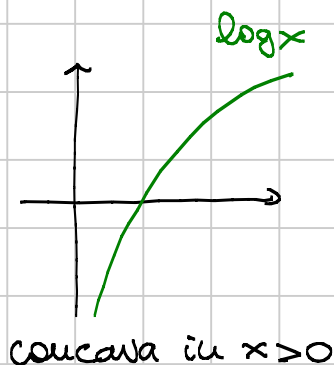
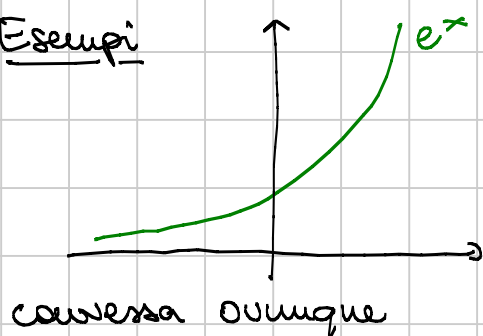
Convessità e concavità. Una funzione è convessa in un intervallo se

geometricamente: per ogni coppia di punti P e Q del tratto di grafico corrispondente si ha che il segmento PQ sta sopra il grafico.



La funzione è concava se il segmento PQ sta sempre sotto.

Esempi



In $x=0$ c'è un cambio da convessa a concava. I p.ti in cui succede questo (o il viceversa) sono detti p.ti di flesso. Cosa succede nei p.ti di flesso?

- Le funzioni convexe stanno sopra le proprie rette tangenti
- Le funzioni concave stanno sotto le proprie rette tangenti
- In un p.to di flesso, da una parte la funzione sta sopra la retta tangente, dall'altra sta sotto. Quindi la retta tangente in un p.to di flesso "attraversa il grafico".

