

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 051

Titolo nota

04/12/2010

Esempio 1 Risolvere la disequazione

$$x + 2 \sin x \geq 0$$

oppure l'eq. $x + 2 \sin x = 0$

Studio la funzione $f(x) = x + 2 \sin x$.

- ① Simmetrie: dispari
- ② Definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ③ Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ed essendo dispari $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- ④ Zeri e segno: per ora non si riesce a fare: PAZIENZA!
- ⑤ Monotonia, cioè segno della derivata.

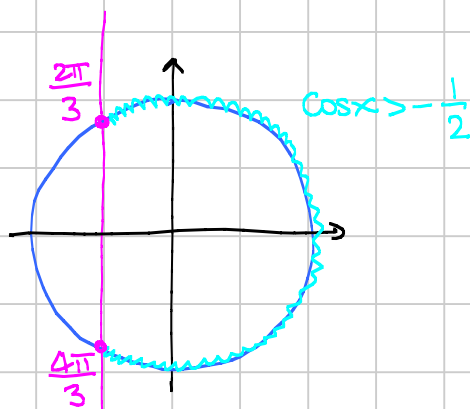
$$f'(x) = 1 + 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

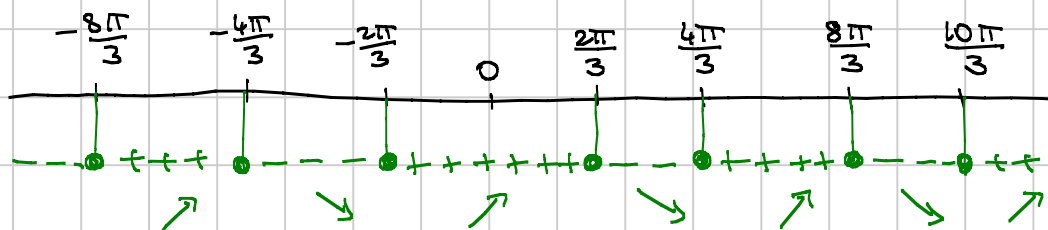


$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

Quindi il segno di $f'(x)$ si può rappresentare così:



Quindi $f(x)$ alterna zone di crescita e decrescita.

Osservazione

$$f(x) > 0 \text{ quando } x > 2$$

$$f(x) < 0 \text{ quando } x < -2$$

Quindi eventuali soluzioni di $f(x) = 0$ si trovano per $x \in [-2, 2]$, quindi se uno deve risolvere $f(x) = 0$ o anche $f(x) > 0$ basta studiare il grafico in $[-2, 2]$.

Domanda: $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ è maggiore o minore di zero?



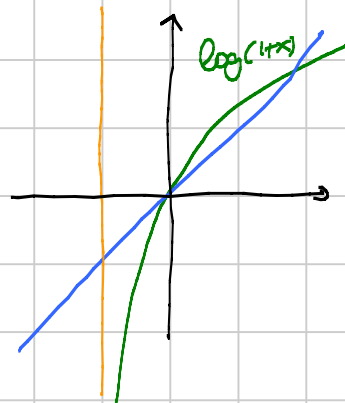
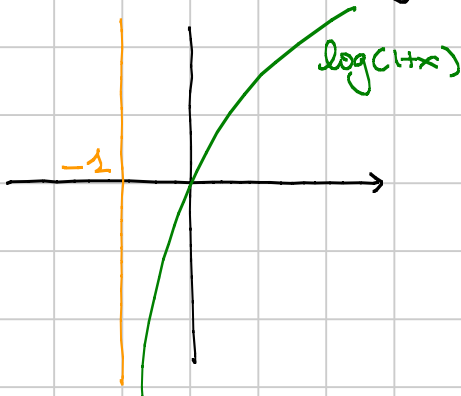
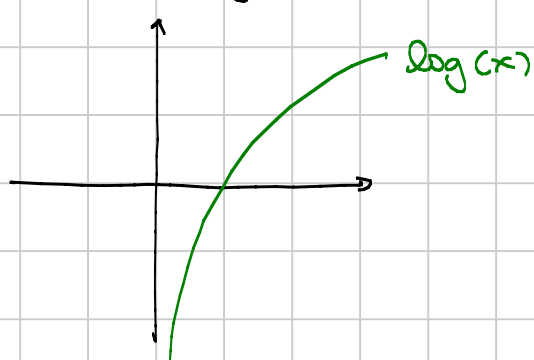
$$\begin{aligned} f\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{4\pi}{3} + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 4 - \sqrt{3} > 0 \end{aligned}$$

A quel punto la funzione non diventa più negativa perché siamo già per $x > 2$. Sugli $x < 0$ la situazione è simmetrica.

Ora sappiamo che $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Esempio 3 Risolvere la disequazione $x \geq \log(1+x)$

Modo sbagliato (pericoloso): sovrapporre i 2 grafici

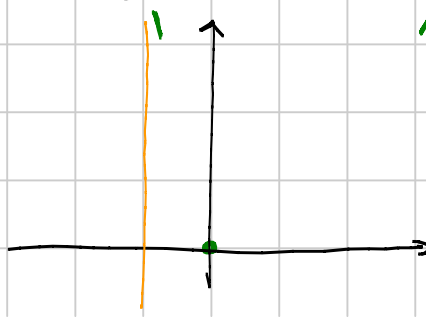


Modo corretto: porto tutto dalla stessa parte e studio la funzione $f(x) = x - \log(1+x)$ (devo risolvere $f(x) \geq 0$)

Nessuna simmetria, definita e continua per ogni $x > -1$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad [-1 - (-\infty)]$$

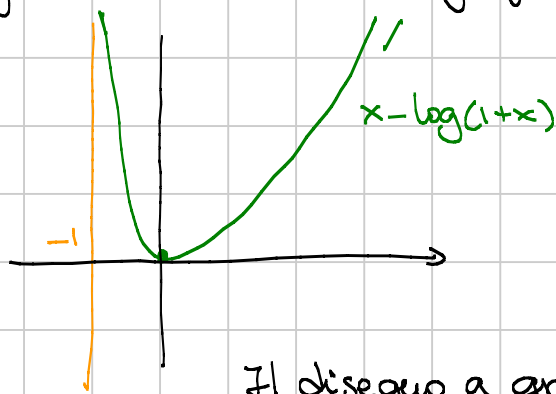
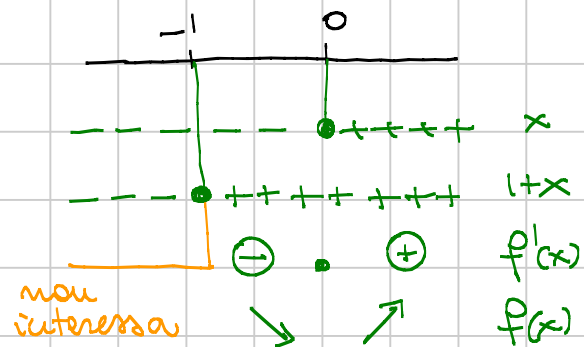


$f(x) \geq 0$ non si risolve per ora: PAZIENZA.

Studio del segno di $f'(x)$, definita per ogni $x > -1$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{\cancel{1+x}-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Abbiamo scoperto che $f(x)$ decresce in $(-1, 0)$ e poi cresce in $(0, +\infty)$. Quindi in $x=0$ c'è un minimo (locale e anche globale). Quindi il grafico corretto è



Quindi $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > -1$
quindi
 $x \geq \log(1+x) \quad \forall x > -1.$

Il disegno a grafici sovrapposti era sbagliato

Esempio 4 Risolvere
 $x \geq \arctan x^2$

Come è fatta $\arctan x^2$?

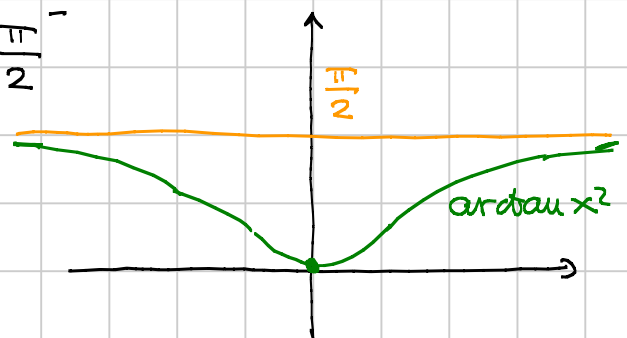
Pari, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x^2 = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

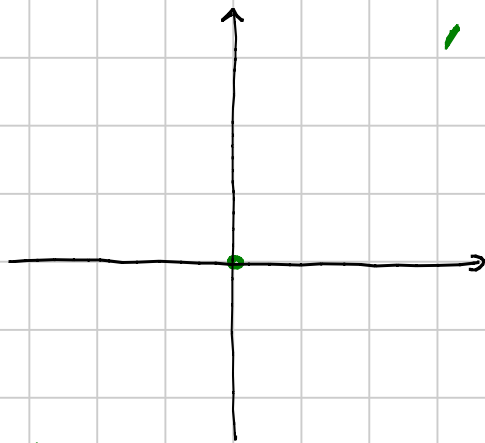
quindi vicino a $x=0$ si comporta come x^2



Studio ora $f(x) = x - \arctan x^3$.

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4}$$
$$= \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

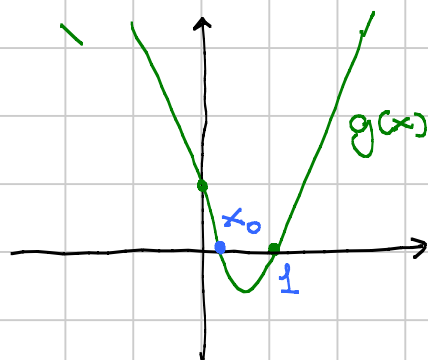
Vorrei studiare $f'(x) = 0$ e $f'(x) > 0$, ma non sono capace (per ora...)

Rilancio: studio a sua volta $g(x) = 1+x^4-2x$.

$$g'(x) = 4x^3 - 2 = 2(2x^3 - 1)$$

Quindi

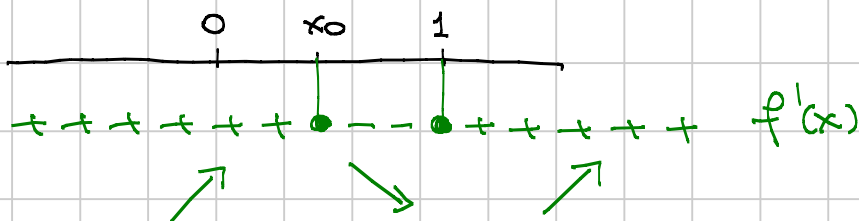
$$g'(x) = 0 \text{ per } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \text{ e } g'(x) > 0 \text{ per } x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$



$$g\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 1 + \frac{1}{2^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 1 - \frac{3}{2^{3/2}} < 0$$

Quindi



$$f(1) = 1 - \arctan 1$$
$$= 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

È bastato controllare $f(1)$ per sapere che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

