

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 050

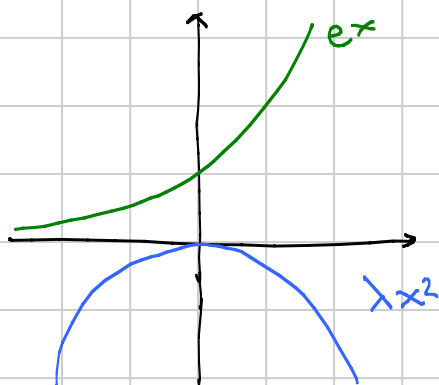
Titolo nota

04/12/2010

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI Stabilire come è fatto il grafico di una funzione $f(x)$ in tutto l'insieme di definizione.

Esempio 1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$e^x = \lambda x^2$$

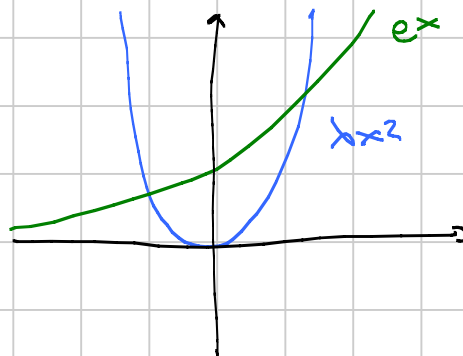
Modo sbagliato di farlo. Sovrapporre i grafici



$\lambda < 0 \Rightarrow$ nessuna soluzione

$\lambda \leq 0 \rightarrow 0$ soluzioni

$\lambda > 0 \rightarrow 2$ soluzioni



$\lambda > 0 \Rightarrow$ due soluzioni

Achtung! MAI fidarsi della sovrapposizione di 2 grafici.

Modo più corretto: isolare il parametro

$$e^x = \lambda x^2 \quad \boxed{\text{divido per } x^2} \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

↓

magari dopo aver osservato che $x=0$ non è mai soluzione, quindi dividendo non perdo soluzioni

Ora studio $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ e poi vado ad intersezione con rette parallele all'asse x .

- ① Simmetrie: in questo caso nessuna.
- ② Zona di definizione: $x \neq 0$ + continuità nella stessa zona
- ③ Limiti agli estremi della zona di definizione

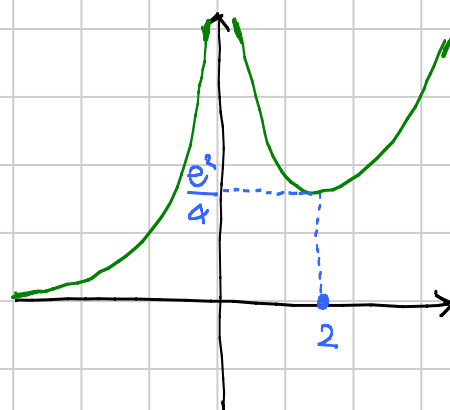
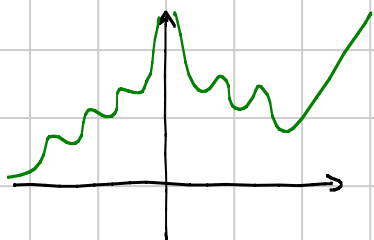
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- ④ Zeri e segno (dove si annulla e dove è >0 oppure <0): in questo caso è sempre >0 per ogni $x \neq 0$.

Cerchiamo di capire come è fatto il grafico.

Ci aspetteremo un andamento così $\rightarrow$
ma non possiamo escludere che sia così:



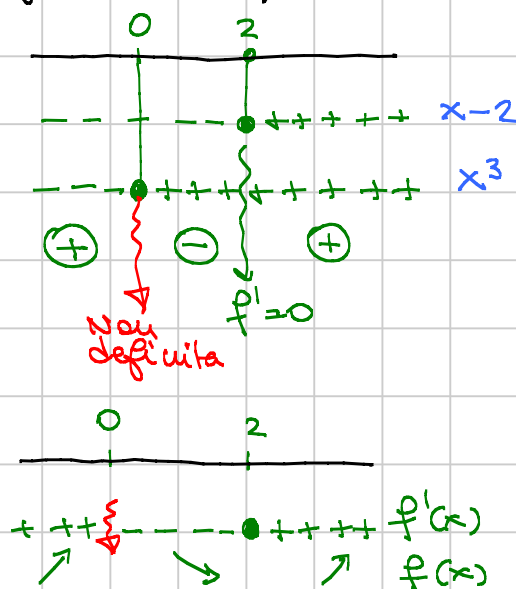
- ⑤ Derivabilità e segno della derivata: $f(x)$ è derivabile $\forall x \neq 0$ e

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = e^x \frac{x^2 - 2x}{x^4} = e^x \frac{x-2}{x^3}$$

Studio il segno della derivata (diseguaglianze da percorso!), cioè capire dove è >0 , $=0$, <0 , non definita. In questo caso basta studiare $\frac{x-2}{x^3}$!

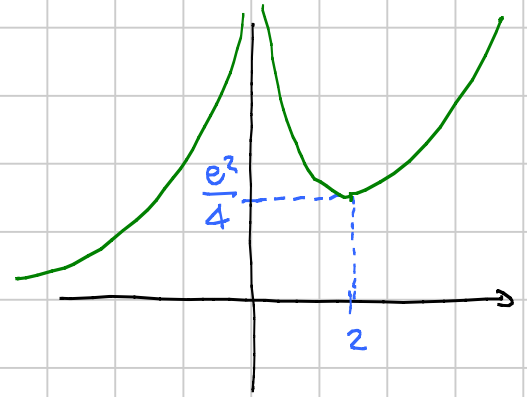
Quindi

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < 0 \text{ e } x > 2 \\ = 0 & \text{per } x = 2 \\ < 0 & \text{per } 0 < x < 2 \end{cases}$$



Ora siamo in grado di rispondere alla domanda di tangenza, relativa al numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$

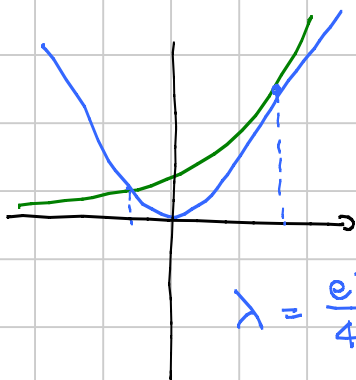
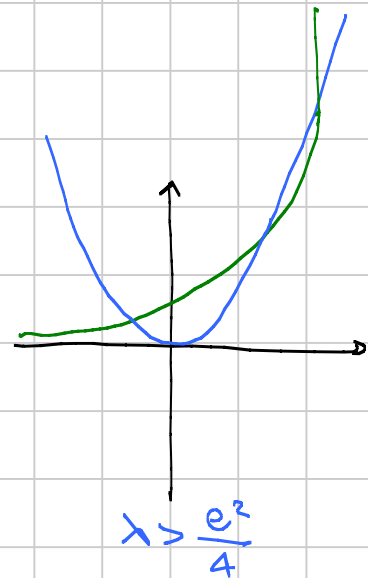
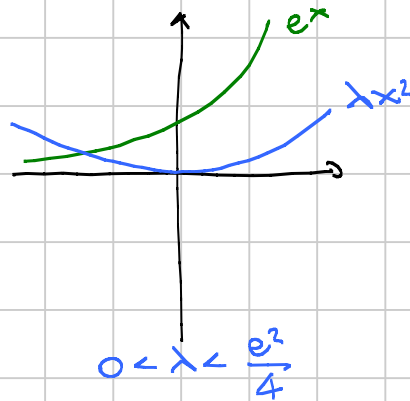
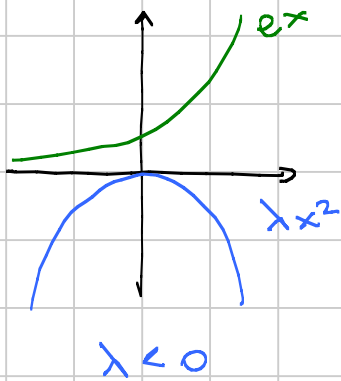
$\lambda \leq 0 \rightarrow 0$ soluzioni
 $0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightarrow 1$ soluzione (negativa)



$\lambda = \frac{e^2}{4} \rightarrow 2$ soluzioni (1 neg., 1 pos.)

$\lambda > \frac{e^2}{4} \rightarrow 3$ soluzioni (1 neg., 2 pos.)

Reinterpretazione dei 2 grafici sovrapposti



$\lambda = \frac{e^2}{4}$ parabola ed esponenziale tangenti. Il valore di λ per cui c'è tangenza si vede solo ricavando λ .

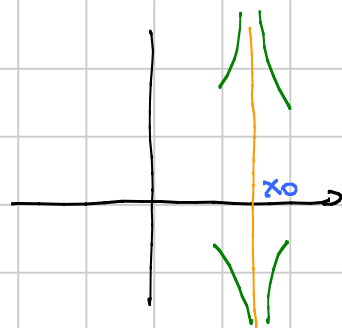
Ulteriori elementi che può essere utile vedere nel grafico.

⑥ Asintoti Orizzontali Si dice che una retta $y = l$ è asintoto orizzontale di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$
 " " $f(x)$ " $x \rightarrow -\infty$ se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Per trovare gli asintoti orizzontali basta fare i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$. In questo caso la retta $y=0$ è asintoto orizz. per $x \rightarrow -\infty$

Verticali

Una retta verticale $x = x_0$ è asintoto verticale per una certa $f(x)$ se accade almeno una di queste 4 possibilità



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Nell'esempio la retta $x=0$ è asintoto verticale.

Altro esempio di calcolo di asintoti $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Nessuna simmetria, definita e continua $\forall x \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+ \leadsto \text{asintoto orizz. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^- \leadsto \text{asintoto orizz. a } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [e^{+\infty}] = +\infty \leadsto \text{asint. vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty}] = 0$$

$f(x) > 0$ dove definita

