

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 049

Titolo nota

04/12/2010

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

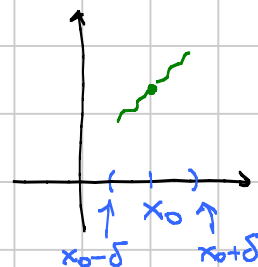
Capire come è fatto il grafico di una funzione vicino ad un p.to x_0 dato.

Monotonia 1 Sia $f(x)$ una funzione. Supponiamo che $f'(x_0) > 0$.

(segno della derivata in un p.to) Allora $\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$$



Achtung! Non ho detto che $f(x)$ è crescente, anche solo debolmente, in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

[Dim.: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$]

Visto che il limite è > 0 , vuol dire che il rapporto incrementale è > 0 per valori di h "vicini ad $h=0$ ", cioè $\exists \delta > 0$ t.c. rapp. increm. > 0 $\forall h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$.

Per $h \in (0, \delta]$ ho che denum. > 0 , quindi numer. > 0 , quindi $f(x_0 + h) > f(x_0)$, quindi un po' a dx di x_0 f vale più che in x_0 .

Per $h \in [-\delta, 0)$ ho che denum. < 0 , quindi numer. < 0 , quindi $f(x_0 + h) < f(x_0)$.]

— 0 — 0 —

Oss. Grazie a monotonia 1 so come è fatta la funzione vicino ad un p.to x_0 in cui $f'(x_0) > 0$ oppure $f'(x_0) < 0$.

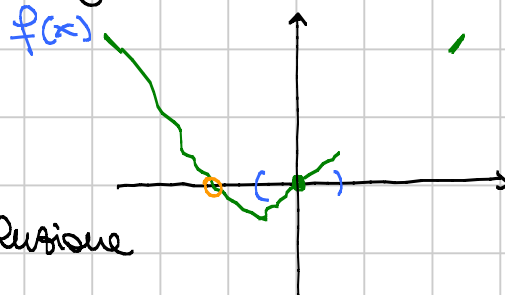
— 0 — 0 —

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione $\sin x + \log(1+x^2) = 0$ ha almeno due soluzioni reali.

$x=0$ è una soluz. $f'(x) = \cos x + \frac{2x}{1+x^2}$

$f'(0) = 1 \Rightarrow$ un po' prima di $x=0$ ho

che $f(x) < 0$. A questo punto c'è un'altra soluzione $x < 0$.

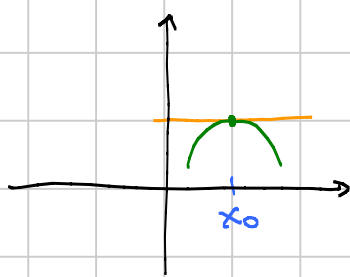


Studio locale di un p.to stazionario. Supponiamo ora che $f'(x_0) = 0$.

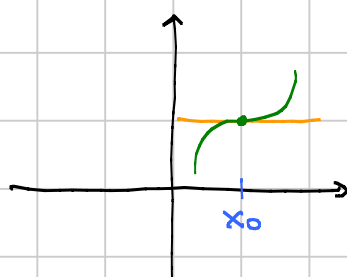
Allora ci sono 5 possibili comportamenti



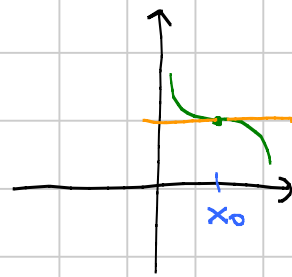
p.to di min.
locale (relativo)



p.to di max
locale



p.to di flesso a
tangente orizzontale
ascendente



p.to di fl.
a tg. orizz.
discendente

la quinta situazione è patologica

Criterio delle derivate successive

Supponiamo che in x_0 si annullino le prime k derivate di f , ma non la $(k+1)$ -esima, cioè

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0 \quad f^{(k+1)}(x_0) \neq 0.$$

Allora ci sono varie possibilità

k pari

- $\nearrow f^{(k+1)}(x_0) > 0$ flesso a tang. orizz. ascendente
- $\searrow f^{(k+1)}(x_0) < 0$ " " " discendente

k dispari

- $\nearrow f^{(k+1)}(x_0) > 0$ p.to di minimo relativo
- $\searrow f^{(k+1)}(x_0) < 0$ p.to di massimo relativo

Oss. La quinta possibilità può presentarsi solo quando ci sono derivate che non esistono, oppure esistono ma sono tutte nulle.

Dim. Ci sono 4 casi. Supponiamo k dispari e $f^{(k+1)}(x_0) > 0$.
Per la formula di Taylor con centro in x_0 avremo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} h^{k+1} + o(h^{k+1})$$

tutti i termini intermedi si annullano,

Ne segue che (porto $f(x_0)$ a sx e divido per R^{k+1})

$$\frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R^{k+1}} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} + \boxed{\frac{o(R^{k+1})}{R^{k+1}}}$$

↓
0

Questo ci dice che la frazione a sinistra tende, per $R \rightarrow 0$, ad un limite positivo (perché ho supposto $f^{(k+1)}(x_0) > 0$).

Ma allora la frazione è > 0 per ogni $R \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$.

Essendo $k+1$ pari, avremo che il denominatore R^{k+1} è sempre positivo per $R \neq 0$ (R^{pari}). Quindi anche il numeratore è sempre positivo, quindi

$$f(x_0+R) > f(x_0) \quad \forall R \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$$

Quindi appena mi sposto la funzione vale di più, quindi x_0 è un pto di minimo locale.

Per esercizio fare gli altri 3 casi.

Il criterio delle derivate successive si può riassumere dicendo che

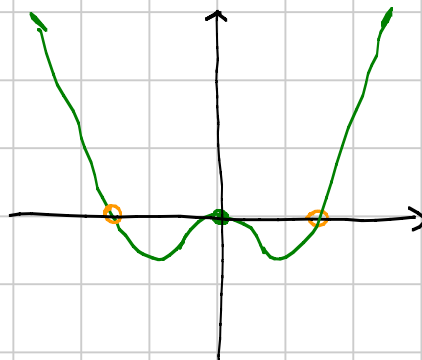
una funzione si comporta vicino ad un pto x_0 come il primo termine non nullo e non costante del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 2 L'equazione $\sin x^4 - \sin x^2 = 0$ ha almeno 3 soluzioni reali.

Pongo $f(x) = \sin x^4 - \sin x^2$.

Infatti $f(0) = 0$, poi f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$



Studio locale in $x=0$: $f(x) = \underbrace{-x^2}_{\substack{\text{viene fuori} \\ \text{da } \sin x^2}} + o(x^2) \Rightarrow f(x) \text{ si comporta vicino a } x=0 \text{ come } -x^2, \text{ quindi max. locale}$