

Hôpital Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che stiamo facendo limiti per $x \rightarrow x_0^+$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ sia una forma del tipo $\frac{0}{0}$

Supponiamo inoltre f e g continue e derivabili e $g'(x) \neq 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$.

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dim. Dire che la forma è del tipo $\frac{0}{0}$ è un po' come dire che $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$.

Applico Cauchy nell'intervallo $[x_0, x]$
 $[a, b]$

$$\begin{array}{ccc} x_0 & c_x & x \\ | & | & | \end{array}$$

Otteniamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Occhio: c dipende da x , quindi lo indico con c_x

Ora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \stackrel{\substack{\text{Pongo} \\ y = c_x}}{=} \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

Infatti $\boxed{x_0} < \boxed{c_x} < \boxed{x}$, quindi $c_x \rightarrow x_0^+$ per i carabinieri.

— o — o — o —

Teoremi di Monotonia Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo

(i) f continua in $[a, b]$,

(ii) f derivabile in (a, b) .

Allora si hanno le seguenti implicazioni

① $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strettamente crescente in $[a, b]$

② $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ debolmente " in $[a, b]$

③ f strett. cresc. in $[a, b] \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ **NO!!!!**

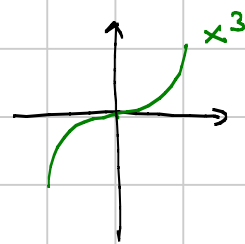
④ f debolm. cresc. in $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

③' f strett. cresc. in $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Esempio $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$

Allora $f(x)$ è strett. crescente, ma

$f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$.



Dim.: Prendiamo 2 punti qualunque tra a e b . Allora per Lagrange si ha



$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} f'(c)$$

Se $f'(x) > 0$ sempre, allora $f'(c) > 0$, quindi $f(d) - f(c) > 0$, cioè $f(d) > f(c)$. Questo implica la stretta crescenza.

Se invece $f'(x) \geq 0$ sempre, allora $f'(c) \geq 0$, quindi $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$, cioè debole crescenza.

Questo dimostra ① e ②.

Per dimostrare ③' e ④, che sono in fondo la stessa cosa, suppongo f strettamente crescente e calcolo i rapporti incrementali

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \frac{+}{+}$$



$$\text{Quindi } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$\parallel$
 $f'(x_0)$

↑ la disuguaglianza stretta non passa al limite.

Se f è debolmente crescente, allora il rapporto incrementale è solo ≥ 0 , e passando al limite ottengo ancora $f'(x_0) \geq 0$.

Osservazione Per $R \rightarrow 0^+$ i rapporti incrementali sono $\frac{+}{+}$
Per $R \rightarrow 0^-$ " " " " $\frac{-}{-}$

Esempio 1 Quante soluzioni ha $3x + \cos x = 2010$?

Pongo $f(x) = 3x + \cos x$. È continua, è derivabile

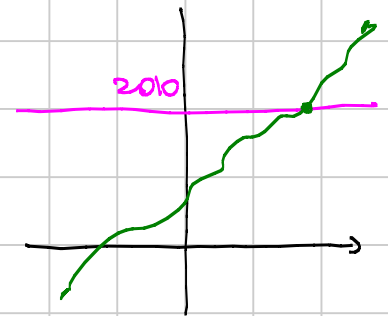
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Queste informazioni ci dicono che l'equazione ha almeno una soluzione, anzi la funzione $f(x)$ è surgettiva

Calcolo la derivata e ottengo

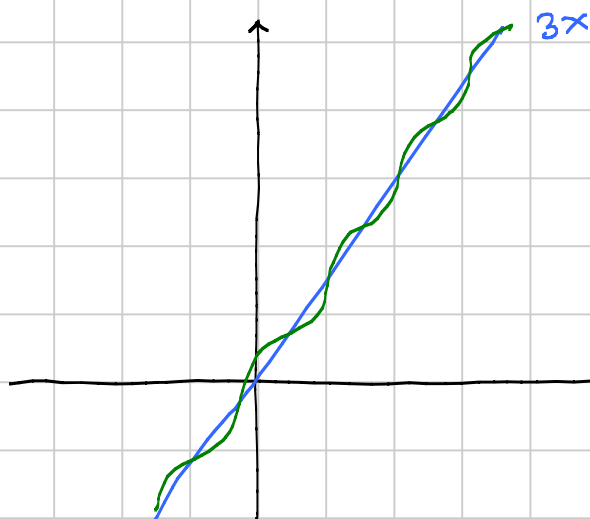
$$f'(x) = 3 - \sin x \geq 2 > 0$$



Per il teorema di monotonia, $f'(x) > 0$ sempre $\Rightarrow f$ strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Ma $f(x)$ strett. crescente $\Rightarrow f(x)$ iniettiva $\Rightarrow$ la soluzione è unica.

Non solo: abbiamo dimostrato che f è bigettiva.

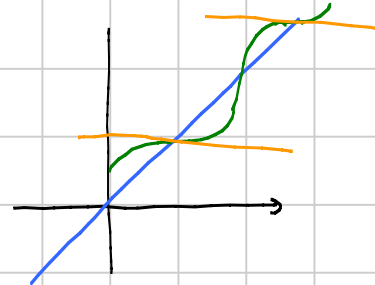


Esempio 2

$$f(x) = x + \cos x$$

Banalmente surgettiva.

È iniettiva? È strett. crescente?



$$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \quad \text{però si può annullare}$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ debolmente crescente in } \mathbb{R}.$$

È pure strettamente crescente? Sì!

Se fosse debolmente crescente, ma non strettamente, allora esisterebbe un tratto piatto, ma allora ci

sarebbe un intero intervallo in cui

$$f'(x) = 0, \text{ ma nel nostro caso } f'(x) = 0$$

solo in un po' di punti

$$(f'(x) \geq 0 \text{ con ANNULLAMENTO SPORADICO}$$

$\Rightarrow f$ strett. crescente).

