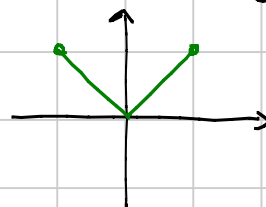
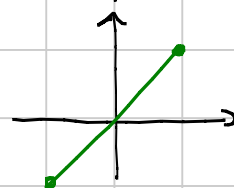


Teoremi sulle funzioni continue e derivabili

$$W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$$

$$\begin{array}{c} \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \\ \Leftarrow \end{array}$$

Teorema di ROLLE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo(i) f continua in $[a, b]$ (ii) f derivabile in (a, b) (se è derivabile in $[a, b]$, meglio)(iii) $f(a) = f(b)$.Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.Osservazioni ① f serve che sia continua e che sia derivabile per ogni $x \in (a, b)$.Basta prendere $f(x) = |x|$
in $[-1, 1]$ ② Serve che $f(a) = f(b)$.Altrimenti basta prendere $f(x) = x$ Dim.: Sia c il punto di max (questo esiste per W.).Se $c \in (a, b)$, allora di sicuro $f'(c) = 0$ (non può essere che $f'(c)$ non esiste per l'ipotesi (ii)).Potrebbe però essere che c sta sul bordo.Prendo allora come c il p.to di minimo (o uno dei p.ti di minimo). Se $c \in (a, b)$ ho finito.L'unico caso "sfortunato" è se sia il max, sia il minimo vengono assunti sul bordo. Ma in tal caso per l'ipotesi (iii) la funzione è costante, ed in questo caso $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a, b)$.

— o — o —

Oss. Sostanzialmente, se $f(a) = f(b)$ non può essere che a e b siano gli unici punti di max/min.

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) f e g continue in $[a,b]$,

(ii) f e g derivabili in (a,b) .

Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c) \quad 1^a \text{ tesi}$$

Se inoltre supponiamo che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora posso dividere e riscrivere la tesi come

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad 2^a \text{ tesi}$$

Dim.: Considero la funzione

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

Vediamo le proprietà di $\varphi(x)$.

(i) È continua in $[a,b]$ perché lo sono $f(x)$ e $g(x)$

(ii) " derivabile in (a,b) " " "

(iii) dico che $\varphi(a) = \varphi(b)$. Infatti

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) \\ &= f(b) g(a) - g(b) f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) \\ &= -f(a) g(b) + g(a) f(b) \end{aligned}$$

Quindi posso applicare il teorema di ROLLE alla funzione $\varphi(x)$.

Otengo che $\exists c \in (a,b)$ tale che $\varphi'(c) = 0$, cioè

$$(f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c) = 0$$

e questa è la prima tesi.

Per passare dalla prima tesi alla seconda tesi devo

• dividere per $g'(c)$ e questo posso farlo perché $\neq 0$ grazie all'ipotesi (iii)

- dividere per $g(b) - g(a)$. Perché è $\neq 0$? Se fosse uguale a 0, avrei che $g(b) = g(a)$, quindi potrei applicare Rolle a $g(x)$ e avrei che esiste un p.to in (a,b) in cui g' si annulla, il che è contro l'ipotesi (iii).

— 0 — 0 —

Oss. Prendo $[a,b] = [-1,1]$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x^3$
 le ipotesi (i) e (ii) sono banalmente soddisfatte, ma non posso dividere per $g(b) - g(a) = 1 - 1 = 0$.

Prendo ora $g(x) = x^3$ e $f(x) = x^2$. Ora posso dividere per $g(b) - g(a)$. Faccio il conto

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{0}{2} = 0$$

Esiste un p.to $c \in (-1,1)$ con $0 = \frac{f'(c)}{g'(c)}$? NO!

Dovrebbe essere $f'(c) = 0$, cioè $c = 0$, quindi si annulla anche $g'(c)$ e diventa $\frac{0}{0}$.

Quindi se l'ipotesi (iii) non è soddisfatta, non è detto che la 2ª tesi si possa scrivere.

— 0 — 0 —

Teorema di Lagrange Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b) .

Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che

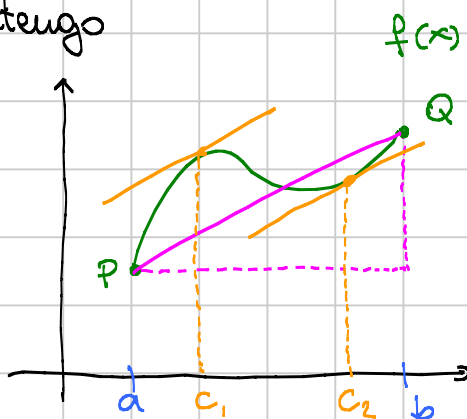
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Interpretazione geometrica Divido per $b-a$, e ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) = \text{coeff. angolare retta tg. nel p.to } c$$

coeff. angolare
retta PQ

Lagrange: esiste un p.to c
 in cui la retta tg. è //
 alla retta PQ



Dim. 1

Applico Cauchy con $g(x) = x$. L'ipotesi (cii) è verificata perché $g'(x) = 1 \neq 0$ sempre. Quindi la 2ª tesi di Cauchy è:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

"

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$$

e questa è la tesi di Lagrange.

Dim. 2

Chiamo $\varphi(x) = f(x)(b-a) - (f(b) - f(a))x$,
o meglio

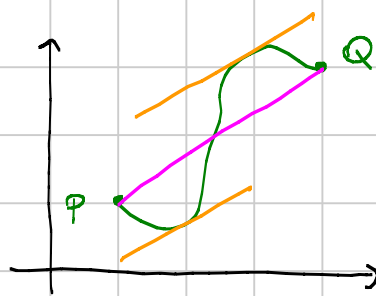
$$\varphi(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{retta parallela alla retta PQ}} x$$

Si verifica che $\varphi(a) = \varphi(b)$, cioè ho "radoluzzato" la figura.
Applicando Rolle a $\varphi(x)$ ottengo che esiste $c \in (a, b)$ con
 $\varphi'(c) = 0$, cioè

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ cioè Lagrange}$$



ROLLE



LAGRANGE