

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 046

Titolo nota

02/12/2010

Indice

$$\begin{array}{ccccccc} W & \Rightarrow & R & \Rightarrow & C & \Rightarrow & L \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & H & & M \\ & & & & \Downarrow & & \\ & & & & T & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{WEIERSTRASS} & \Rightarrow & \text{ROLLE} & \Rightarrow & \text{CAUCHY} & \Rightarrow & \text{LAGRANGE} \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & \text{H\^OPITAL} & & \text{MONOTONIA} \\ & & \text{quadrato} & & \boxed{\Downarrow} & & \\ & & & & \text{TAYLOR} & & \end{array}$$

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$

(ii) $\exists x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = M$.

I punti x_0 che verificano la (ii) sono detti punti di massimo.

Oss. M è "una y ", cioè la massima quota raggiunta dalla funzione. Non è obbligato ad esistere, ma quando esiste è unico.

Il pto di max. è "una x ". Esiste se e solo se esiste M e non è obbligato ad essere unico.

— o — o —

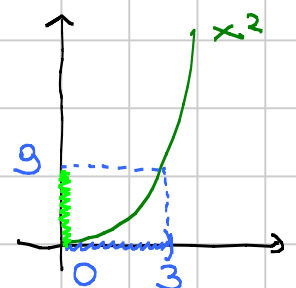
Definizioni analoghe valgono per minimo e punti di minimo.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^2$ $A = [0, 3]$.

$\min \{ f(x) : x \in A \} = 0$ pto di min: $x = 0$

$\max \{ f(x) : x \in A \}$ N.E. $\sup \{ f(x) : x \in A \} = 9$



Teorema di Weierstrass Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
 ↓ intervallo (quindi limitato)
 estremi COMPRESI

Allora max e min esistono per forza.
 — o — o —

Esempio 2 $f(x) = \arctan x$ $A = [1, +\infty)$

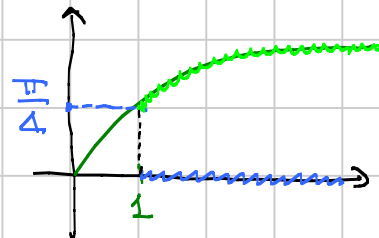
Non posso applicare W. perché l'insieme non è un intervallo

$$\min \{ \arctan x : x \in [1, +\infty) \} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

P.to di minimo: $x=1$.

$$\max \{ \arctan x : x \in [1, +\infty) \} \text{ N.E.}$$

$$\sup \{ \quad \quad \quad \} = \frac{\pi}{2}$$



Ricerca di punti di max / min. Supponiamo di sapere che
 max / min esistono in $[a, b]$

Allora i candidati ad essere p.ti di max / min ricadono in una di queste 3 categorie

- ① Punti stazionari interni: p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x) = 0$
- ② Punti singolari interni: p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
- ③ Bordo: $x=a$ e $x=b$.

— o — o —

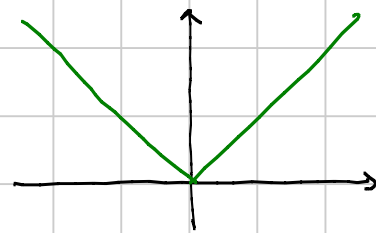
Esempio 3 $f(x) = |x|$ $A = [-2, 2]$

$$\min \{ f(x) : x \in [-2, 2] \} = 0$$

P.to di min: $x=0$ (categoria ②)

$$\max \{ f(x) : x \in [-2, 2] \} = 2$$

P.ti di max: $x=-2$ e $x=2$ (categoria ③)



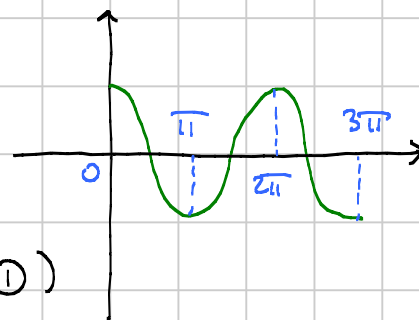
Esempio 4 $f(x) = \cos x$ $A = [0, 3\pi]$

$$\max \{ \cos x : x \in [0, 3\pi] \} = 1$$

p.ti di max: $x=0$ (categoria ③) e $x=2\pi$ (cat. ①)

$$\min \{ \cos x : x \in [0, 3\pi] \} = -1$$

p.ti di min: $x=\pi$ (cat. ①) e $x=3\pi$ (cat. ③).



Dim. (della ricerca di p.ti di max/min).

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia x_0 un p.to di max (esiste per W.).

Dove si può trovare x_0 ?

- Sul bordo, quindi è in categoria ③
- In (a, b) e $f'(x_0)$ non esiste, quindi è in categoria ②
- In (a, b) e $f'(x_0)$ esiste, e in questo caso voglio dimostrare che $f'(x_0) = 0$. Considero il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{che segue ha?}$$

Il numeratore è sempre ≤ 0 perché x_0 è un p.to di max, cioè $f(x_0) \geq f(x_0+h)$, quindi $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$. Quindi

Per $h > 0$ ho che $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$, quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Per $h < 0$ ho che rapp. increm. ≥ 0 , quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

cometto dopo video

Quindi l'unica possibilità è che sia $f'(x_0) = 0$.

(Ho usato che $f'(x_0)$ esiste quando ho detto che il limite per $h \rightarrow 0^+$ e per $h \rightarrow 0^-$ esistono e sono uguali.)

— 0 — 0 —

Esempio 5 $f(x) = x^2 - x^3$ $A = [0, 1]$

Max e min esistono per W. Candidati:

- ① $f'(x) = 0$; $2x - 3x^2 = 0$; $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ unico in $(0, 1)$
- ② $f'(x)$ non esiste: $\emptyset$
- ③ $x = 0$ e $x = 1$.

Quindi i candidati ad essere pti di max/min sono

$$x=0, x=\frac{2}{3}, x=1.$$

Basta sostituire nella funzione !!!

$$x=0 \leadsto f(0)=0$$

$$x=\frac{2}{3} \leadsto f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{12-8}{27} = \frac{4}{27}$$

$$x=1 \leadsto f(1) = 1-1=0$$

Quindi

$$\max \{x^2 - x^3 : x \in [0, 1]\} = \frac{4}{27} \quad \text{P.to di max : } x = \frac{2}{3}$$

$$\min \{x^2 - x^3 : x \in [0, 1]\} = 0 \quad \text{P.ti di min : } x=0 \text{ e } x=1.$$

— 0 — 0 — 0 —

Esempio 6 $\max \{ \log(3 + \cos(x(\sin^2 x + 5))) : x \in \mathbb{R} \}$

Esiste? W. non lo posso usare (forse...)

Però... $f(x)$ è continua e periodica. Un periodo è 2π .

Di conseguenza

$$\begin{aligned} & \max \{ f(x) : x \in [0, 2\pi] \} \quad (\text{questo esiste per W.}) \\ &= \max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Idee per il minimo.

— 0 — 0 —

Esempio 7 $\min \{ x^2 + \sin(x^5 + 7) : x \in \mathbb{R} \}$

Esiste? W. non lo posso usare (forse...)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Questo basta per garantire l'esistenza del minimo.

