

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 045

Titolo nota

02/12/2010

Teorema di esistenza degli zeri Sia $[a, b]$ un intervallo, e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto).

Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Oss.1 Il punto c non è obbligato ad essere unico. Possono anche essere infiniti.

Oss.2 È essenziale che $f(x)$ sia continua (se può saltare il teorema non è più vero)

Dim.: possiamo sempre supporre che sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (altrimenti cambio $f(x)$ con $-f(x)$). Pongo

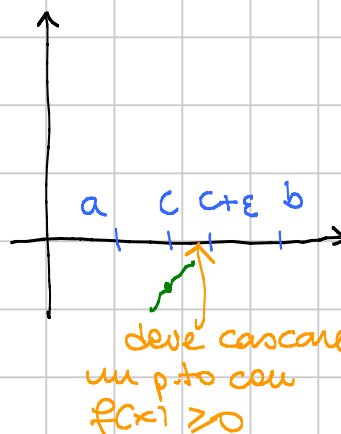
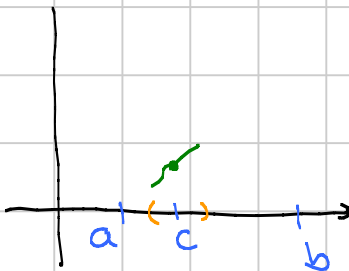
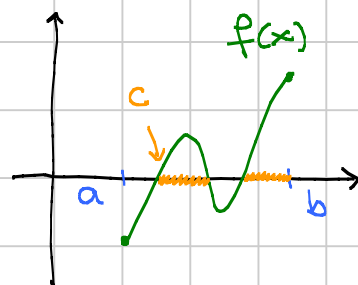
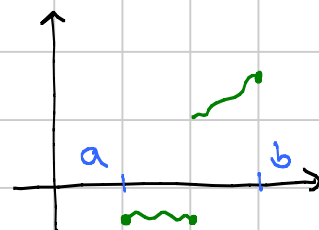
$$c = \inf \{ x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \}$$

Dico che $f(c) = 0$. Lo dimostro per assurdo.

Supponiamo che sia $f(c) > 0$. Allora per continuità $f(x) > 0$ anche un po' prima di c . Ma allora c non è l'inf degli x in cui $f \geq 0$.

Supponiamo ora che sia $f(c) < 0$. Allora per continuità $f(x)$ resta negativa anche un po' dopo c . Questo è assurdo perché se c è l'inf, allora ci sono punti in cui $f(x) \geq 0$ vicini quanto vogliamo a c .

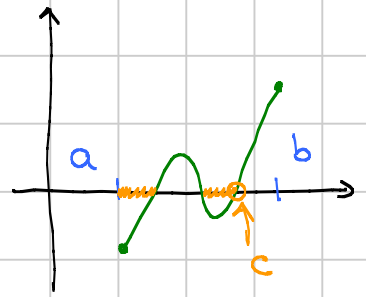
— o — o —



Oss. Potrei definire il p.to c come

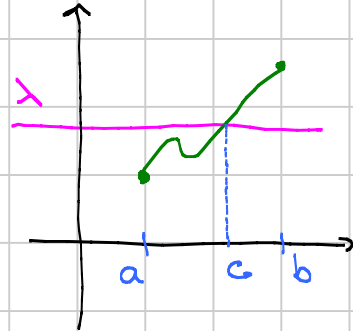
$$c = \sup \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$$

Veniva lo stesso c?



— o — o —

Corollario 1 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$.
Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = \lambda$.
(Teorema di esistenza dei valori intermedi)



[Dim.: basta applicare l'esistenza degli zeri alla
funzione $g(x) = f(x) - \lambda$]

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione
 $\sin x + \log x = 10$
ha almeno una soluzione reale

Basta trovare un intervallo $[a, b]$ ai cui estremi la funzione
assume valori < 10 e > 10 . Ovviamente $f(x) = \sin x + \log x$.

Prendo $a = 1$: $f(1) = \sin 1 < 10$

Prendo $b = e^{100}$: $f(e^{100}) = \sin e^{100} + \log e^{100} = \sin \dots + 100 > 10$

Quindi nell'intervallo $[1, e^{100}]$ c'è almeno una soluzione.

Esempio 2 Consideriamo $f(x) = x^7 + \cos x + 13 \log(5+x^2)$
Domanda: $f(x)$ è surgettiva?

Cosa devo fare per dimostrare che è surgettiva? Devo dimostrare che
 $f(x) = \lambda$ ha soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Osserviamo ora che $f(x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Queste 3 informazioni implicano la surgettività.

Infatti: fisso $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poiché $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow -\infty$,

esiste un p.to a in cui $f(a) < \lambda$.

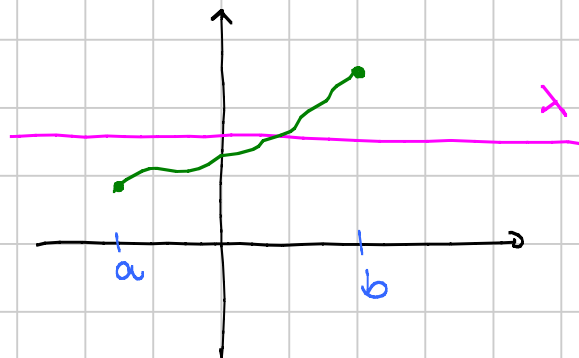
Poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$,

esiste un p.to $b > a$ in cui $f(b) > \lambda$

(infatti $f(x) > \lambda \quad \forall x \geq k$).

Quindi per il teorema di esistenza dei valori intermedi esiste $c \in (a, b)$

t.c. $f(c) = \lambda$.



Quindi l'esistenza dell'intervallo $[a, b]$ su cui applicare il teorema è data dalla definizione di limite.

Esempio 3 L'equazione $\sin x + \log x = 0$ ha almeno una soluzione reale.

Considero $f(x) = \sin x + \log x$. Questa è continua in $(0, +\infty)$.

Inoltre

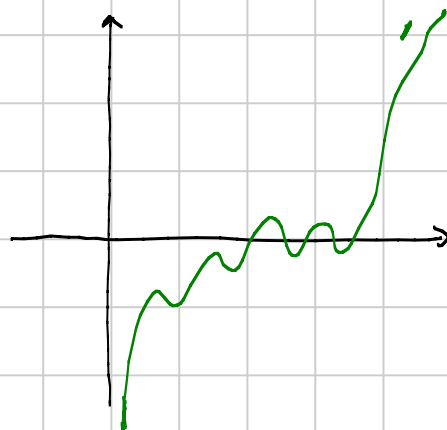
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Queste informazioni bastano per concludere che $f(x)$ è surgettiva, quindi

$$f(x) = \lambda$$

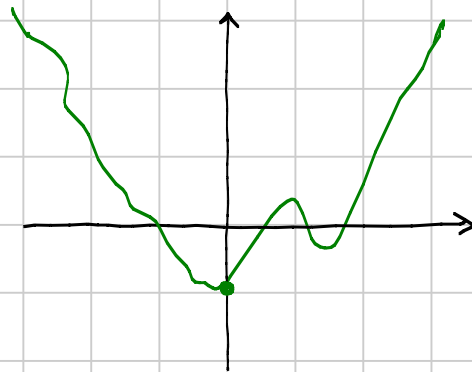
ha soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.



Esempio 4 L'equazione $\log(1+x^2) - \cos x = 0$
ha almeno 2 soluzioni.

Fatti importanti

- è continua in tutto $\mathbb{R}$
- $f(0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Ora sappiamo che esiste almeno una soluzione $c > 0$

Per dimostrare che esiste almeno una soluzione $c < 0$ ci sono due modi.

1° modo: calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2° modo: osservare che $f(x)$ è pari, quindi se $f(c) = 0$, allora $f(-c) = f(c) = 0$.

Esempio 5 Sia $p(x)$ un polinomio di grado DISPARI. Allora, visto come funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di sicuro suriettivo.

Infatti i limiti a $\pm\infty$ sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$.

(occhio: $p(x) = -3x^7 + x^4 + 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$)

Non è detto che $p(x)$ sia iniettivo. Ad esempio

$p(x) = x^3 - x$ si annulla per $x = 0, 1, -1$

