

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 044

Titolo nota

01/12/2010

Esercizio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3 \log n - n^2 + 2}$

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3 \log n} = \frac{1}{n \log n}$ e questa diverge $\frac{1}{n[\log n]^{\alpha}}$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n \log n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+3}{n^3 \log n - n^2 + 2} \cdot n \log n = \dots = 1 \neq 0 \neq +\infty.$$

Esercizio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) Condizione necessaria Ok

Brutale: $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \sim \frac{1}{n} \log n$
 $e^x \sim 1+x$

Quindi la serie data si comporta come $\sum \left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}$ e questa converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

1° FATTO La serie data si comporta come $\sum \left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}$. Si tratta di fare il confronto asintotico:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}}{\left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{\log n}{n}} \right]^{\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} \right]^{\alpha} = 1.$$

2° FATTO La serie $\sum \left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Caso $\alpha \leq 1$: $\left[\frac{\log n}{n} \right]^{\alpha} \geq \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge, quindi anche l'altra diverge.

Caso $\alpha > 1$: confronto asintotico con $\frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}}$ ~~1~~ $\frac{\alpha+1}{2}$ α

Devo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log n}{n} \right]^\alpha \cdot n^{\frac{\alpha+1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log^\alpha n}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0 \text{ perché i log perdono dalle potenze}$$

Visto che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, ho che $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitivamente,

quindi $a_n \leq b_n$ definitivamente, quindi se $\sum b_n < +\infty$ anche $\sum a_n < +\infty$

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha$

La serie è a termini positivi perché $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$ e $\sin x$ in quella zona è positivo.

$$\left[\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha \sim \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha/2}}, \text{ quindi converge } \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > 1, \text{ quindi } \Leftrightarrow \alpha > 2$$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{\alpha/2}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left[\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^\alpha}{\frac{1}{n^{\alpha/2}}} = \left[\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right]^\alpha \rightarrow 1, \text{ quindi stesso comportamento.}$$

Esercizio 4 $\sum \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)^\alpha$

Brutale: $\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3n^3}$
 $\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3$

$$\text{quindi } \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)^\alpha \sim \frac{1}{3^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{3\alpha}} \text{ e questa converge } \Leftrightarrow 3\alpha > 1, \text{ cioè } \alpha > \frac{1}{3}.$$

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{1}{n^{3\alpha}}$ e dopo un po' si ritrova il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$$

Esercizio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n + 9^n}{3^n + \alpha^n}$

Caso facile: $\alpha > 0$

Brutale: $a_n \sim \frac{9^n}{\alpha^n} = \left(\frac{9}{\alpha}\right)^n$ geometrica che converge per $\frac{9}{\alpha} < 1$, cioè $\alpha > 9$.
 almeno se $\alpha > 3$

Rigoroso. Distinguo i casi

- $\alpha \leq 3$... e qui non ho nemmeno la condizione nec.
- $\alpha > 3$... e qui faccio il confronto asintotico con $\frac{9^n}{\alpha^n}$.

Esercizio 6 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \Rightarrow$ la serie converge

Esercizio 7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

Provo con E-ALA: $(\log n)^{\log n} = \frac{e^{\log n \cdot \log(\log n)}}{n} = \left[e^{\log(\log n)} \right]^{\log(\log n)} = n^{\log(\log n)}$

Quindi

$$\frac{1}{(\log n)^{\log n}} = \frac{1}{n^{\log(\log n)}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

(Ho messo un esponente definitivamente piccolo)

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $\Rightarrow$ la serie data converge.

Commento precorsistico

$$A^{\log B} = B^{\log A}$$

Scritti come esponenziali diventano $e^{\log B \cdot \log A} = e^{\log A \cdot \log B}$

Esercizio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\arctan n} \right)^n \quad (\alpha > 0)$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\alpha}{\arctan n} \rightarrow \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{\pi}$

Quindi: • se $\frac{2\alpha}{\pi} > 1$, cioè $\alpha > \frac{\pi}{2}$ la serie diverge

• se $\frac{2\alpha}{\pi} < 1$, cioè $\alpha < \frac{\pi}{2}$ la serie converge

• se $\frac{2\alpha}{\pi} = 1$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2}$, allora la radice dire
BOM e devo sostituire. Ottengo

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\arctan n} \right)^n \geq 1$$

↑
perché denominatore $\leq \frac{\pi}{2}$

Se $a_n \geq 1$ sempre, allora non c'è la condizione necessaria, quindi la serie diverge.