

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 043

Titolo nota

01/12/2010

Esercizio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{n}{n^2+1}$ Leibnitz con $a_n = \arctan \frac{n}{n^2+1}$

(i) $a_n \geq 0$ definit. OK (iii) $a_n \rightarrow 0$ OK.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

$$\arctan \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \stackrel{?}{\leq} \arctan \frac{n}{n^2+1}$$

Essendo $\arctan x$ stret. crescente, la posso "semplificare"

$$\frac{n+1}{n^2+2n+2} \stackrel{?}{\leq} \frac{n}{n^2+1} ; \quad \cancel{n^3+n} + n^2 + 1 \stackrel{?}{\leq} \cancel{n^3} + 2n^2 + 2n$$

$$n^2 + n - 1 \geq 0 \quad \text{vero definitiv.}$$

Quindi la serie converge.

Potevo usare l'assoluta convergenza? Devo studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n}{n^2+1}$

Questa diverge per confronto asintotico con $\frac{1}{n}$, quindi non posso dedurre nulla.

$$\left[\arctan \frac{n}{n^2+1} \sim \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \right]$$

Esercizio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-26}{n^4-2n^2-15}$

Leibnitz: (i) + (iii) OK (ii) Auguri! Bisogna sviluppare i conti

Provo con l'assoluta convergenza, cioè studio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{n^2+3n-26}{n^4-2n^2-15} \right| \quad \text{che per } n \text{ grandi coincide con}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-26}{n^4-2n^2-15} \quad \text{Questa converge per confronto asint. con } \sum \frac{1}{n^2}$$

Quindi la serie iniziale converge per assoluta convergenza.

Esercizio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-26}{n^2-2n-15}$

Non converge perché manca la condizione necessaria.

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-26}{n^3-2n^2-15}$

Se faccio l'assoluta convergenza, mi trovo a confrontare con $\frac{1}{n}$, quindi la serie con i valori assoluti diverge, quindi BOK.

Alternativa 1: Leibnitz: (i) e (iii) ok, ma (ii) --.

Alternativa 2: aggiungo e tolgo $\frac{1}{n}$

$$\text{Serie data} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+3n-26}{n^3-2n^2-15} - \frac{1}{n} \right]$$

SE le 2 serie che ho scritto convergono entrambe, allora converge la serie iniziale per il teorema algebrico.

La prima serie converge per Leibnitz.

Per la seconda faccio il calcolo:

$$\begin{aligned} \frac{n^2+3n-26}{n^3-2n^2-15} - \frac{1}{n} &= \frac{n^3+3n^2-26n - n^3+2n^2+15}{n(n^3-2n^2-15)} \\ &= \frac{5n^2-26n+15}{n^4-2n^3-15n} \sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Quindi la seconda serie converge per assoluta convergenza.

Esercizio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^{\alpha}+5}$

Brutale: $a_n \sim \frac{n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ e questa converge quando $\alpha-1 > 1$ cioè quando $\alpha > 2$.

Rigoroso: confronto asintotico con $\frac{n}{n^{\alpha}}$. Calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n^{\alpha}+5} \cdot \frac{n^{\alpha}}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{n} \cdot \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha}+5} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{n^{\alpha}}} = 1 \neq 0 \neq +\infty \end{aligned}$$

$\downarrow$ 0 $\downarrow$ 0 se $\alpha > 0$

Esempio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3) \alpha^n$

Caso più semplice: $\alpha \geq 0$. Applico il criterio della radice (posso farlo perché la serie è a termini di segno costante)

$$\sqrt[n]{(n^2+3) \alpha^n} = \alpha \cdot \sqrt[n]{n^2+3} \rightarrow \alpha$$

↓
1

Se $\alpha > 1$, la serie diverge.

Se $\alpha \in [0, 1)$, la serie converge.

Se $\alpha = 1$, la radice dice BOK, ma sostituendo $\alpha = 1$ trovo

$\sum (n^2+3)$ e questa diverge perché manca la condizione necessaria.

Caso meno semplice: $\alpha \leq 0$ Diventa una serie a segno alternato.

Assoluta convergenza: studio $\sum_{n=0}^{\infty} |(n^2+3) \alpha^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3) |\alpha|^n$

Questa converge per $|\alpha| < 1$ e diverge altrimenti.

Quindi per $\alpha \in (-1, 0]$ ho che la serie iniziale converge, e

per $\alpha \leq -1$ la serie con i valori assoluti diverge, quindi BOK.

Tuttavia per tutti gli $\alpha \leq -1$ manca la condizione necessaria, in quanto

$$|(n^2+3) \alpha^n| = (n^2+3) \underbrace{|\alpha|^n}_{\geq 1} \geq n^2+3 \rightarrow +\infty$$

Manca la condizione necessaria, la serie non può convergere.

Conclusione: la serie iniziale converge $\Leftrightarrow \alpha \in (-1, 1)$.

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + 3n^2 - 7}{n^{20} + 5n + 6}$

Facciamo $\alpha \geq 0$.

Brutale: $a_n \sim \frac{n^\alpha}{n^{20}} = \frac{1}{n^{20-\alpha}}$ che converge per $20-\alpha > 1$,
cioè per $\alpha < 19$.

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - n^2 + 3}{n^7 + n^\alpha - 5}$ Questa converge sempre !!!!!

[Brutale : $a_n \sim \frac{n^5}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-5}}$, quindi $\alpha-5 > 1$, quindi $\alpha > 6$]

no! Quando dico Denominatore $\sim n^\alpha$ dico una cosa che vale solo per $\alpha > 7$

Però per $\alpha \leq 7$ ho che $a_n \sim \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}$ quindi converge comunque,

Per una dim. rigorosa ho 2 strade.

1^a possibilità: distinguo i casi $\alpha > 7$ e $\alpha \leq 7$ e faccio due confronti asintotici diversi.

2^a possibilità: faccio un confronto a due:

$$\underbrace{\frac{n^5 - n^2 + 3}{n^7 + n^\alpha - 5}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{n^5 + 3}{n^7 - 5}}_{b_n} \quad (\text{Num. + grande, Denom. + piccolo})$$

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.