

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 042

Titolo nota

23/11/2010

Serie con termini a segno variabile

- Criterio di LEIBNITZ
- Criterio dell'assoluta convergenza

Assoluta convergenza $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ converge

Utilizzo operativo :

- devo studiare $\sum a_n$ con a_n a segni variabili
- studio $\sum |a_n|$: questa è a segno fisso, quindi ho tutti i criteri precedenti a disposizione
- se $\sum |a_n| < +\infty$, allora $\sum a_n$ converge
- se $\sum |a_n| = +\infty$, allora $\sum a_n$ BOH

[Dim. $a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$, quindi

$$\sum a_n = \underbrace{\sum |a_n|}_{\text{converge}} - \underbrace{\sum (|a_n| - a_n)}_{\text{se questa convergesse anche finito perché } \sum a_n \text{ sarebbe differenza di 2 serie convergenti}}$$

Ora si ha che $0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

↑
infatti se $a_n \geq 0$ diventa 0,
se $a_n \leq 0$ diventa $2|a_n|$

Poiché $\sum 2|a_n|$ converge, anche $\sum (|a_n| - a_n)$ converge per confronto tra serie a termini ≥ 0 .]
— 0 — 0 —

Criterio di LEIBNITZ (criterio delle serie a segno alternato)

Consideriamo la serie $\sum \underbrace{(-1)^n}_{a_n} d_n$. Supponiamo che

(i) $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (segno alternato)

(ii) $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \rightarrow 0$

Tesi: la serie converge

Achtung! Se qualcuna delle ipotesi non è verificata, allora BOH. Se però a non essere verificata è l'ipotesi (iii), allora manca la condizione necessaria (infatti si vede per il "trucco del valore assoluto" che $a_n \rightarrow 0$ se e solo se $\alpha_n \rightarrow 0$), quindi di sicuro la serie iniziale non converge (ma le restano ancora 3 possibilità...)

[Idea della dimostrazione : nelle ipotesi del criterio di Leibnitz, come è fatta la successione S_n delle somme parziali ?

$$S_0 = \alpha_0 \quad S_1 = \alpha_0 - \alpha_1 \quad S_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \quad S_3 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

Come è messa S_2 rispetto a S_0 ?

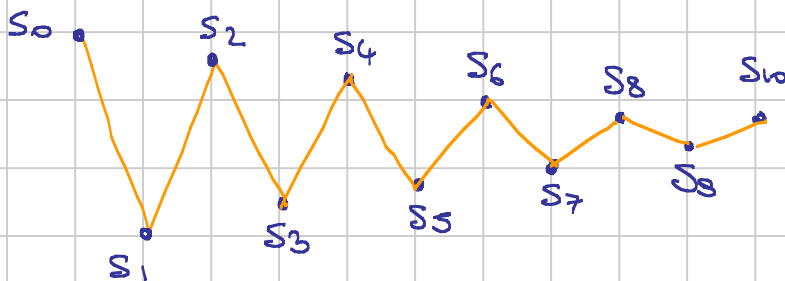
$$\alpha_0 \stackrel{?}{\geq} \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \quad \text{VERA}$$

Quindi si verifica per inclusione che

S_{2n} è debolmente decrescente

S_{2n+1} è debolmente crescente

Inoltre tutte le S_{2n} sono $\geq$ tutte le S_{2n+1}



Allora $S_{2n} \rightarrow l_1$ e $S_{2n+1} \rightarrow l_2$, e resta da dimostrare che

$$l_1 = l_2, \text{ ma } \begin{array}{ccc} S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} \rightarrow 0 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ l_2 - l_1 = 0 \\ \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} \end{array}$$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Serie a segno alternato con $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$.

Controllo ipotesi di Leibnitz

(i) $\alpha_n \geq 0$ banale (iii) $\alpha_n \rightarrow 0$ banale

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. Devo controllare che $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, questa è vera perché denominatore + grande $\Rightarrow$ frazione + piccola.

Quindi la serie converge.

Potero usare l'assoluta convergenza? Sì, ovvero studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \text{ Questa converge, quindi quella iniziale converge.}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Segui alterni con $a_n = \frac{1}{n}$

Controllo le ipotesi di Leibnitz: (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ banale

(iii) $a_n \rightarrow 0$ banale

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ banale

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Potero usare l'assoluta convergenza? Dovrò studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \text{ Questa diverge, quindi BOH.}$$

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$. Segui alterni con $a_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

(i) $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ banale (iii) $a_n \rightarrow 0$ banale

(ii) devo controllare se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq 1$, cioè

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{?}{\leq} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essendo $\arctan x$ strettamente crescente la disug. è equivalente a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ e questa è vera per le solite ragioni di denominatori.}$$

Conclusione: la serie iniziale converge per Leibnitz.

Potero usare l'assoluta convergenza? Mi riducevo a studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ ma questa diverge per confronto asintotico}$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (Pone formalmente il limite) [Brutale:

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ Segui a caso ...

1° modo $\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, quindi $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ conv.

NO!!!!!! Posso usare il confronto solo tra serie a termini positivi.
Altrimenti $-1000 \leq \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \sum (-1000)$ converge!!

2° modo Provo assoluta convergenza. Devo studiare

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$. Per questa posso dire che $0 \leq \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
quindi posso usare criterio del
confronto tra serie a termini ≥ 0 .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$
 $\uparrow$ confronto tra serie a termini positivi
 $\uparrow$ assoluta convergenza

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\left(\frac{n+3}{2n+7}\right)$

Segui variabili con $a_n = \arcsin\left(\frac{n+3}{2n+7}\right)$

Controllo le ipotesi: (i) $a_n \geq 0$ (banale) per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) ...

(iii) $a_n \rightarrow 0$ FALSA perché $a_n \rightarrow \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Quindi di sicuro non converge.