

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 041

Titolo nota

23/11/2010

Serie a termini di segno costante (positivi)

- Radice
- Rapporto
- Confronto
- Confronto asintotico

Confronto Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$$

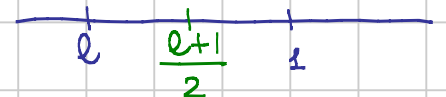
[Dim. osservare che $S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ + usare confronto tra limiti]
↑
↑
somme parziali delle 2 serie

Radice Supponiamo $a_n \geq 0$ definitivamente e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

- Allora
- se $l > 1$ si ha $\sum a_n = +\infty$
 - se $l < 1$ si ha $\sum a_n < +\infty$
 - se $l = 1$, allora BOTH.

Dim.: caso $l > 1$ Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, per il criterio della radice applicato ai limiti si ha che $a_n \rightarrow +\infty$, quindi la cond. necessaria non è verificata, quindi la serie non può convergere, e non le resta che divergere a $+\infty$.

caso $l < 1$ Ora il criterio della radice dice che $a_n \rightarrow 0$, quindi cond. nec. ok, quindi la serie POTREBBE convergere, ma non basta. Tuttavia $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente, quindi $0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = b_n$. Ora



$\sum b_n < +\infty$ (geometrica con parametro $\in (-1, 1)$) $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$
— o — o —
↑
criterio confronto

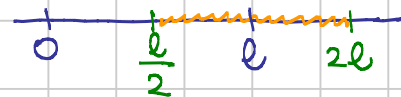
Confronto asintotico

Siano $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$.

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ si comportano allo stesso modo.

[Dim. Poiché $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora definitivamente.



$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$$

Moltiplico per $b_n > 0$ e ottengo

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n \quad \text{definitivamente}$$

Caso 1

Supponiamo che $\sum b_n < +\infty$, allora $\sum 2l b_n < +\infty$ (teorema algebrico), ma allora per la disuguaglianza a destra anche $\sum a_n$ converge (uso confronto)

Caso 2

Supponiamo che $\sum b_n = +\infty$, allora $\sum \frac{l}{2} b_n = +\infty$, ma allora per la disuguaglianza a sinistra anche $\sum a_n = +\infty$ (uso confronto)

— 0 — 0 —

Confronto asintotico (casi limite) $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ (primo caso limite)

[allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, cioè $a_n \leq b_n$, quindi]

Allora se $\sum b_n < +\infty$, anche $\sum a_n < +\infty$

se $\sum b_n = +\infty$, allora BOK.

Supponiamo invece che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ (secondo caso limite)

[allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$, quindi]

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ BOK}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + n^2}{n! + \cos n}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ sempre e $a_n \rightarrow 0$

Brutale: $a_n \sim \frac{2^n}{n!}$ e questa con radice o rapporto si studia

1ª fase Prendo $b_n = \frac{2^n}{n!}$ e dim. equivalenza asintotica

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + n^2}{n! + \cos n} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)}{\cancel{n!} \left(1 + \frac{\cos n}{n!}\right)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico abbiamo che $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$.

2ª fase Studio di $\sum b_n$ con criterio del rapporto (o radice)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \sum b_n \text{ converge}$$

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$.

Provo a fare il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log n = +\infty \text{ (caso limite)}$$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \text{ definitivamente, quindi } a_n \geq b_n \text{ definitivamente.} \right]$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$ (armonica con $a=1$), quindi $\sum a_n = +\infty$.

Esempio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ Provo confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cancel{n^2} \log n} \cdot \cancel{n^2} = 0 \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \leq 1, \right.$$

$\left. \text{quindi } a_n \leq b_n \text{ definitivamente.} \right] \sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty \text{ (armonica con } a=2)$
quindi $\sum a_n < +\infty$.

Esempio 4 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

1° tentativo Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \dots a_n \geq b_n \text{ definitiv.} \right]$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

2° tentativo Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ definitiv., quindi } a_n \leq b_n \text{ definitiv.} \right]$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH.}$$

Idea: il $\log n$ al numeratore sposta verso la zona rossa, ma non abbastanza



3° tentativo Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, \text{ quindi } \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots, \text{ quindi } a_n \leq b_n \text{ definitiv.} \right]$$

$$\sum b_n < +\infty \text{ (armonica con } a = \frac{3}{2} > 1), \text{ quindi } \sum a_n < +\infty.$$