

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 040

Titolo nota

20/11/2010

Criterio del confronto asintotico (caso standard)

Siano $a_n \geq 0$ definitivamente e $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (l \neq 0, +\infty)$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso tipo di comportamento.

(cioè se una diverge, l'altra diverge; se una converge, l'altra converge, magari a valori diversi).

— 0 — 0 —

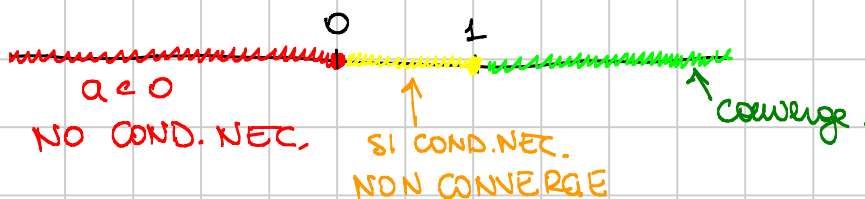
SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

La vera serie armonica è la 1ª con $a=1$, cioè $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Per le serie armoniche si ha questa situazione



Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{n^2}{2^n}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ definitivamente $\Rightarrow$ termini positivi
 $a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$

Quindi la serie converge.

Con il criterio della radice veniva: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, come sopra.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{7^n + 8^n}{2^n + 9^n}}_{= a_n}$

termini positivi e $a_n \rightarrow 0$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{7^n + 8^n}{2^n + 9^n}} = \sqrt[n]{\frac{8^n \left(1 + \left(\frac{7}{8}\right)^n\right)}{9^n \left(1 + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}} = \frac{8}{9} \left[\frac{1 + \left(\frac{7}{8}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{9}\right)^n} \right]^{\frac{1}{n}}$
 $\rightarrow \frac{8}{9} < 1$ $1^0 = 1$.

Quindi la serie converge.

Provo con il confronto asintotico: si tratta di trovare una serie di b_n di cui conosco il comportamento con cui confrontare. In questo caso $b_n = \frac{8^n}{9^n}$. Devo fare

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{7^n + 8^n}{2^n + 9^n} \cdot \frac{9^n}{8^n} \rightarrow 1$, quindi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, ma

$\sum b_n = \sum \frac{8^n}{9^n} = \sum \left(\frac{8}{9}\right)^n$ e questa converge perché è una serie geometrica con parametro $a \in (-1, 1)$.

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2 + 2}{n^3 + 7n + 1}}_{a_n}$

termini positivi e $a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, quindi è armonica generalizzata con esponente $a=1$, la quale diverge.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$. Devo fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+3}{n^3+7n+1} \cdot n = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè diverge.

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}$

$a_n \rightarrow 0$ e la serie è a termini positivi. Infatti $\frac{1}{n^2}$ sta in $[0, 1]$ e in questa zona $\sin x \geq 0$.

Brutale: $\sin x \sim x$ quando $x \rightarrow 0$, quindi $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$, e la serie di $\frac{1}{n^2}$ converge perché armonica con $a=2$.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$. Devo fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

$x = \frac{1}{n^2}$

quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè converge.

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n^2}$

termini positivi, non è evidente il limite di a_n .

Criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n} = e^{-n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = e^{-\frac{\log\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot 3} \cdot 3} \rightarrow e^{-3}$$

Essendo $e^{-3} < 1$, la serie converge. $\left[-n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) \sim -n \cdot \frac{3}{n} = -3\right]$
 $\log(1+x) \sim x$

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt[n]{2010} - 1\right)}_{a_n}$

termini positivi e $a_n \rightarrow 0$

Brutale: $\sqrt[n]{2010} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 2010} - 1 \sim 1 + \frac{\log 2010}{n} - 1$
quindi diverge!
 $e^x \sim 1+x$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$. Si tratta di fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2010} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2010^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2010^x - 1}{x} = \log 2010 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi la serie data si comporta come la serie di $\frac{1}{n}$, cioè diverge.

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$

Brutale: $1 - \cos \frac{1}{n} \sim$ $\nearrow \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ $\cancel{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}}$, quindi la serie

si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi converge.

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$ e viene il solito limite notevole con il coseno.

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + \sin n!}{n+3}$ $a_n \geq 0$ e $a_n \rightarrow 0$

$a_n \geq \frac{4}{n+3}$ Ora $\sum \frac{4}{n+3} = +\infty$ per confronto asint.
con $\sum \frac{1}{n}$, quindi anche $\sum a_n$ diverge
a $+\infty$ per confronto a due.
— 0 — 0 —