

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 039

Titolo nota

20/11/2010

Esempio 2 di serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n^2+n}}_{a_n}$$

Si vede che $a_n \rightarrow 0$, quindi condizione necessaria OK, quindi la serie potrebbe convergere. Calcolo le somme parziali, usando che

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}\text{Quindi } S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Quindi $S_n \rightarrow 1$ e dunque la serie converge a 1. Si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-2} + \frac{1}{4-3} + \frac{1}{5-4} + \dots = 1$$

— 0 — 0 —

Serie telescopica = avvengono "cancellazioni incrociate" nel calcolo di S_n per cui rimangono solo "il primo e l'ultimo".

— 0 — 0 —

SERIE GEOMETRICA È una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro fissato

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

Come dimostrato a suo tempo per induzione, si ha che

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{se } a \neq 1)$$

Per fare il limite di S_n bisogna distinguere dei casi.

- Se $a > 1$, numeratore $\rightarrow +\infty$, denom. > 0 , quindi $S_n \rightarrow +\infty$
- Se $-1 < a < 1$, cioè $|a| < 1$, allora $a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi numeratore $\rightarrow -1$, quindi $S_n \rightarrow \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$, quindi la serie converge.

• Se $a < -1$, allora $S_{2m} = \frac{a^{2m+1} - 1}{a - 1} \left[= \frac{-\infty}{a-1} \right] \rightarrow +\infty$

$S_{2m+1} = \frac{a^{2m+2} - 1}{a - 1} \left[= \frac{+\infty}{a-1} \right] \rightarrow -\infty$

Quindi S_n non ha limite e la serie è indeterminata.

- Se $a = 1$, allora la geometrica è la somma di tutti 1, quindi diverge a $+\infty$.
- Se $a = -1$, allora la geometrica è la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, che è indeterminata.

Riassumendo

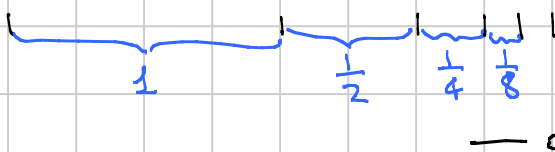
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{Converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{È indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Caso particolare

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

= serie geometrica con $a = \frac{1}{2}$ che converge a

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$


 Per sommando infiniti oggetti, la somma può convergere.

In generale non si riesce a trovare una formula esplicita per S_n . Tuttavia esistono dei criteri per stabilire il comportamento di una serie senza passare per il calcolo di S_n .

Osservazione: esistono poi dei metodi per trovare in maniera approssimativa il valore della somma nel caso in cui si sa già che la serie è di tipo $\textcircled{1}$.

STUDIO DELLA CONVERGENZA: CRITERI

→ Serie a termini positivi
(segno costante)

- criterio della radice
- criterio del rapporto
- criterio del confronto
- confronto asintotico → casi standard
→ casi limite

→ Serie a termini di segno variabile

- criterio di LEIBNITZ
- criterio assoluta convergenza

Fatto 1 Una serie a termini positivi ha solo 2 tipi di comportamento a disposizione:

- convergere
- divergere a $+\infty$

[Dim.: se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolmente crescente, quindi ha solo 2 possibili comportamenti]

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3}{n^2-5n+2}}_{a_n}$

Travare una formula per le somme parziali è sostanzialmente impossibile.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, quindi la condizione necessaria non è verificata, quindi la serie non può convergere.

Essendo $a_n \geq 0$ definitivamente, può solo convergere o divergere a $+\infty$.
L'unica possibilità rimasta è che diverga a $+\infty$.
— o — o —

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$. Allora

- se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$), $\sum a_n = +\infty$
- se $l < 1$, allora $\sum a_n$ converge
- se $l = 1$, allora BOK.

Criterio del rapporto Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$.

Allora come con la radice

Criterio del confronto Sia a_n e b_n due successioni con
 $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.

Allora valgono queste implicazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty, \text{ cioè converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Achtung! • Ogni altra implicazione è abusiva

- Si raccomanda di non usare il confronto quando le serie in gioco non sono a termini positivi.

[Dim. Siano S_n^a e S_n^b le somme parziali delle 2 serie.

Visto che $a_n \leq b_n$ per ogni n (basta modificare un numero finito di termini), avremo che

$$S_n^a \leq S_n^b.$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ vuol dire che $S_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora per confronto tra limiti anche $S_n^b \rightarrow +\infty$, quindi $\sum b_n = +\infty$

Viceversa, se $\sum b_n$ converge, allora $S_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma allora S_n^a non può andare a $+\infty$, quindi dovendo avere un limite (perché è deb. crescente) tale limite sarà per forza reale, quindi $\sum a_n$ converge.

— o — o —