

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 038

Titolo nota

20/11/2010

SERIE NUMERICHE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Si intende che a_n è una successione.

La serie è la somma degli infiniti termini della successione.

La cosa da definire è "cosa vuol dire sommare infinite cose".

Somme parziali

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$S_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

Somma di un numero finito di termini

La serie, cioè la somma degli infiniti termini della successione, si definisce come il limite della successione S_n per $n \rightarrow +\infty$.

a_n successione data

Costruisco somme parziali S_n

Faccio il limite della succ. S_n

Essendo un limite, una serie ha 4 possibili comportamenti:

- ① convergere ad un $l \in \mathbb{R}$ (se $S_n \rightarrow l$)
- ② divergere a $+\infty$ (se $S_n \rightarrow +\infty$)
- ③ " " $-\infty$ (se $S_n \rightarrow -\infty$)
- ④ essere indeterminata (se S_n non ha limite).

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} 0$ ($a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). In questo caso $S_n = 0$, quindi $S_n \rightarrow 0$.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ ($a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). In questo caso $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = n+1 \rightarrow +\infty$

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ($a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)

In questo caso $S_0 = a_0 = 1$

$$S_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1) = 0$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$$

$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

Si dimostra facilmente (per induzione) che $S_{2n} = 1$ e $S_{2n+1} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che la serie è indeterminata.
— 0 — 0 —

Proprietà algebriche delle serie Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie, e sia λ un numero reale $\neq 0$.

$$\text{Allora } \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

[Dim.: basta raccogliere λ nelle somme parziali]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Questa vale con le regole di addizione in $\overline{\mathbb{R}}$, ed in particolare non vale nel caso $+\infty - \infty$.

[Dim.: sia $c_n = a_n + b_n$. Siano S_n^a, S_n^b, S_n^c le somme parziali delle serie di a_n, b_n, c_n . Allora

$$\begin{aligned} S_n^c &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= S_n^a + S_n^b \end{aligned}$$

essendo una somma finita posso riorganizzare

Allora ho dimostrato che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

— 0 — 0 —

Questo vale con le serie limitazioni del fatto che la somma dei limiti è il limite della somma.

Achtung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ non è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Questo non è vero nemmeno se ci sono solo 2 termini

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$

Piccola variante $\sum_{n=77}^{\infty} a_n$ in questo caso faccio le somme parziali come

$$S_{77} = a_{77}, S_{78} = a_{77} + a_{78} \text{ e in generale}$$

$$S_n = \sum_{i=77}^n a_i \text{ e poi si fa il limite degli } S_n.$$

Osservazione $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=77}^{\infty} a_n$ hanno sempre lo stesso tipo di comportamento $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$.

Ovviamente, se il comportamento è di tipo $\boxed{1}$, i valori del limite possono essere diversi.

Il motivo per cui il comportamento è lo stesso è che le somme parziali della prima sono uguali alle somme parziali della seconda con l'aggiunta di un blocco iniziale fisso $a_0 + a_1 + \dots + a_{76}$

Osservazione collegata Se in una serie modifico un numero finito di termini, il comportamento globale non cambia.

CONDIZIONE NECESSARIA Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (tipo $\boxed{1}$), allora $a_n \rightarrow 0$.

Dim.:

$$\begin{array}{ccc} a_n = S_n - S_{n-1} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ l - l = 0 \end{array}$$

In questa dimostrazione è essenziale sapere che il limite l è reale (cioè tipo $\boxed{1}$), altrimenti ci si ritrova una forma indeterminata.

Utilizzo operativo della cond. nec. . Devo studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Inizio a fare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

- Se il limite viene $=0$, allora la serie POTREBBE convergere
- Se il limite non viene 0 (cioè viene un numero reale $l \neq 0$, oppure viene $+\infty$, $-\infty$, o non esiste), allora la serie DI SICURO NON converge (se convergesse, il limite dovrebbe fare 0), ma le restano ancora 3 possibilità.
— 0 — 0 —

SERIE TELESOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \log 1 = 0$, quindi la condizione necessaria è verificata, quindi la serie POTREBBE convergere.

Provo a calcolare le somme parziali

$$S_n = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

Ho quindi dimostrato che $S_n = \log(n+1) \rightarrow +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

Formalmente $S_n = \log(n+1)$ avrebbe dimostrato per induzione.

Osservazione: altro modo di vedere la stessa cosa

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n, \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (\cancel{\log 2} - \log 1) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\log 4 - \cancel{\log 3}) + \dots \\ &= -\log 1 + \log(n+1) = \log(n+1) \\ &\quad \text{— 0 — 0 —} \end{aligned}$$