

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 037

Titolo nota

18/11/2010

Esercizio 1 $f(x) = \log(1 + \cos x)$ $x_0 = 0$ $n = 3$

Per $\cos x$ posso usare sviluppo classico in $x_0 = 0$

$$f(x) = \log\left(1 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \log\left(2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)$$

$R \rightarrow 0$

Mi devo procurare uno sviluppo di $\log(2+R)$ per $R \rightarrow 0$.

Quindi calcolo lo sviluppo di $g(x) = \log x$ con $x_0 = 2$

$$g(2) = \log 2 \quad g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{2}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow g''(2) = -\frac{1}{4}$$

Quindi $g(2+R) = g(2) + g'(2)R + \frac{1}{2}g''(2)R^2 + o(R^2)$

$$\log(2+R) = \log 2 + \frac{1}{2}R - \frac{1}{8}R^2 + o(R^2)$$

quindi $\log\left(2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = \log 2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)$

$$\log(1 + \cos x) = \log 2 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

non faccio R^2
perché sono tutti
termini da x^4 in su

Esercizio 2 Sia $f(x) = e^{\sin x^2}$. Calcolare $f^{(6)}(0)$

1° modo: derivare 6 volte... AUGURI!

2° modo: Taylor di ordine 6.

Pongo $y = \sin x^2$ e noto che $y \rightarrow 0$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3), \text{ quindi}$$

$$e^{\sin x^2} = 1 + \sin x^2 + \frac{1}{2}[\sin x^2]^2 + \frac{1}{6}[\sin x^2]^3 + o([\sin x^2]^3)$$

$\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, quindi $\sinh x^2 = x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$, quindi

$$\begin{aligned} e^{\sinh x^2} &= 1 + \left(x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\right) + \frac{1}{2} \left(\quad\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\quad\right)^3 + o\left(\left(\quad\right)^3\right) \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

(Volevo potrei mettere anche $o(x^7)$ perché $e^{\sinh x^2}$ è pari e quindi lo sviluppo ha solo potenze pari...).

Ora per la formula dei polinomi di Taylor abbiamo che

$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

Guardando il coefficiente di x^6 scopriamo che

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{1}{3}, \text{ da cui } f^{(6)}(0) = \frac{1}{3}6! = \frac{1}{3} \cdot 720 = 240.$$

Achtung! Con questo sistema si calcolano solo le derivate in $x=0$!!!

Esercizio 3 $f(x) = \log(1+x^3)$. Calcolare $f^{(30)}(0)$

Mi serve lo sviluppo di $f(x)$ di grado 30, ed in particolare il termine con x^{30} .

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \dots - \frac{1}{10}y^{10} + \dots \text{ da cui}$$

$$\log(1+x^3) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \dots - \frac{1}{10}x^{30} + \dots = \dots + \frac{f^{(30)}(0)}{30!}x^{30} + \dots$$

Uguagliando i coefficienti di x^{30} otteniamo

$$-\frac{1}{10} = \frac{f^{(30)}(0)}{30!} \text{ da cui } f^{(30)}(0) = -\frac{30!}{10}.$$

Analogamente $f^{(1000)}(0) = 0$. Devo andare a vedere il coeff. di x^{1000} nello sviluppo di $\log(1+x^3)$, ma in questo sviluppo gli esponenti sono tutti multipli di 3, quindi x^{1000} ha coeff. uguale a 0.

Esercizio 4 $f(x) = \arctan x^{10} + \log(1+x^{37}) - \sinh(x^{10})$.

Quante delle prime 50 derivate di $f(x)$ sono $\neq 0$ per $x=0$??

Tradotto: quanti (e quali) sono i termini non nulli nello sviluppo di $f(x)$ con $n=50$?

$$\arctan x^{10} = x^{10} - \frac{1}{3} x^{30} + \frac{1}{5} x^{50} + o(x^{50}) \quad \arctan y = y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + o(y^5)$$

$$\log(1+x^{37}) = x^{37} + o(x^{50}) \quad (\text{in realtà anche } x^{37} + o(x^{73}))$$

$$\sinh x^{10} = x^{10} + \frac{1}{6} x^{30} + \frac{1}{120} x^{50} + o(x^{50}) \quad \sinh y = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 + o(y^5)$$

Mettendo insieme: $f(x) = \cancel{x^{10}} - \frac{1}{3} x^{30} + \frac{1}{5} x^{50} + x^{37} - \cancel{x^{10}} - \frac{1}{6} x^{30} - \frac{1}{120} x^{50} + o(x^{50})$

Le derivate non nulle in $x=0$ sono 3: la 30-esima, la 37-esima, la 50-esima.

Quanto vale $f^{(30)}(0)$?

$$\dots \boxed{-\frac{1}{2} x^{30}} + \dots = \dots + \frac{f^{(30)}(0)}{30!} x^{30} + \dots \Rightarrow f^{(30)}(0) = -\frac{30!}{2}$$

$\downarrow$
 $-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

Esercizio 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} n [\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}]$

1° modo: razionalizzo $n(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} =$

$$= n \frac{\cancel{n+4} - \cancel{n+1}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{+3n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = +\infty \quad (\text{racadde } \sqrt{n} \text{ sopra e sotto})$$

2° modo $n[\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}] = n\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right)$

$$= n\sqrt{n} \left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$= n\sqrt{n} \left[\cancel{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n} - \cancel{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= n\sqrt{n} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{3}{2} \sqrt{n} + n\sqrt{n} o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sqrt{n} \left\{ \frac{3}{2} + n o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} \left\{ \frac{3}{2} + \underbrace{\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 0} \right\} \rightarrow +\infty$$

Esercizio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+3} - \sqrt[4]{n^4+2} \right] n$

1° modo: razionalizzazione (AUGURI!) $A^4 - B^4 = (A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$

2° modo: raccolgo n^4 e uso gli sviluppi

$$\left[\sqrt[4]{n^4 \left(1 + \frac{3}{n^4}\right)} - \sqrt[4]{n^4 \left(1 + \frac{2}{n^4}\right)} \right] n = n^2 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{3}{n^4}} - \sqrt[4]{1 + \frac{2}{n^4}} \right)$$

Ora $(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}x + o(x)$ da cui

$$= n^2 \left(\cancel{1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n^4} - \cancel{1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) = n^2 \left(\frac{1}{4} \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0$$

$$n^2 o\left(\frac{1}{n^4}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = o(\dots)$$

$$= \frac{1}{n^2} o(1) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Se fosse stato $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sqrt[4]{n^4+3} - \sqrt[4]{n^4+2} \right)$ veniva $\frac{1}{4}$ (verificare!!).