

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 036

Titolo nota

18/11/2010

Taylor con centro in $x=0$

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Idea della dimostrazione La dim. formale sarebbe per induzione su n .

Dim. nel caso $n=3$ Devo dimostrare che

$$f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{1}{2} f''(0)x^2 - \frac{1}{6} f'''(0)x^3 = o(x^3)$$

Divido per x^3 e faccio il limite per $x \rightarrow 0$ sperando che venga $=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{1}{2} f''(0)x^2 - \frac{1}{6} f'''(0)x^3}{x^3} \quad \left[\frac{f(0) - f(0)}{0} : \text{Hôp} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{1}{2} f'''(0)x^2}{3x^2} \quad \left[\frac{f'(0) - f'(0)}{0} : \text{Hôp} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x} \quad \left[\frac{f''(0) - f''(0)}{0} : \text{Hôp} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = f'''(0) - f'''(0) = 0$$

Idea è che i fattoriali che sono al denominatore si cancellano uno a uno che si deriva x^n
— 0 — 0 —

Oss. Quali ipotesi su $f(x)$ ho usato nello scrivere e dimostrare la formula?

Ho usato che abbia n derivate, anzi $(n-1)$ derivate in un intorno di $x=0$, mentre l' n -esima derivata basta in $x=0$.
— 0 — 0 —

Taylor con centro in $x = x_0$

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$P_n(x-x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Questa formula segue da quella precedente ponendo $x-x_0 = h$.
Quando $x \rightarrow x_0$, ho che $h \rightarrow 0$ e la formula diventa

$$f(x_0+h) = P_n(h) + o(h^n) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Dove

$$P_n(h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

Dim. basta chiamare $g(h) = f(x_0+h)$ (cioè spostare l'asse y)
e applicare la formula di Taylor alla $g(h)$ per $h \rightarrow 0$.
Diventa

$$g(h) = g(0) + g'(0)h + \frac{1}{2}g''(0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)h^n + o(h^n)$$

Ora $g(0) = f(x_0)$, $g'(h) = f'(x_0+h)$ quindi $g'(0) = f'(x_0)$
e in generale $g^{(k)}(h) = f^{(k)}(x_0+h)$ quindi $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$.
In altre parole: le derivate di g in $h=0$ sono le derivate di f in x_0 .

Quindi la formula di Taylor per $g(h)$ in $h=0$ diventa
la formula di Taylor di $f(x)$ in $x = x_0$
— 0 — 0 —

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 1$, $n = 2$

Devo calcolare $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$. $f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{quindi } f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{quindi } f''(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Pentaubis

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2) \text{ per } R \rightarrow 0$$

$$f(x_0+R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{1}{2}f''(x_0)R^2 + o(R^2)$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$ $x_0 = 3$ $n = 3$

Devo calcolare $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$ che sono tutti e^3 . Quindi

$$e^{3+R} = e^3 + e^3R + \frac{1}{2}e^3R^2 + \frac{1}{6}e^3R^3 + o(R^3) \text{ per } R \rightarrow 0$$

In realtà bastava un po' di percorso:

$$e^{3+R} = e^3 \cdot e^R = e^3 \left(1 + R + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{6}R^3 + o(R^3)\right)$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{6}$ $n = 3$

1° modo: calcolare $f(\frac{\pi}{6})$, $f'(\frac{\pi}{6})$, $f''(\frac{\pi}{6})$, $f'''(\frac{\pi}{6})$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f'(x) = \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$f(x_0+R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{1}{2}f''(x_0)R^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)R^3 + o(R^3)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + R\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{1}{4}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}R^3 + o(R^3).$$

2° modo: percorso !!

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + R\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos R + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin R$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}R^2 + o(R^3)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(R - \frac{1}{6}R^3 + o(R^3)\right)$$

$R \rightarrow 0$, quindi posso usare Taylor in 0 sviluppo di $\sin R$

Esempio 4 $f(x) = \arctan(e^x)$ $x_0 = 0$ $n = 2$

Anche se sono in $x_0 = 0$, non posso usare lo sviluppo di $\arctan$ centrato in $x_0 = 0$. Infatti l'argomento di $\arctan$ tende a 1.

Posso invece usare lo sviluppo per $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\arctan(e^x) = \arctan\left(1 + \underbrace{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}_{= R \rightarrow 0}\right)$$

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + \underbrace{o\left(\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right)^2\right)}_{= o(x^2) \text{ SOLTanto}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{4}x^2} + o(x^2) - \cancel{\frac{1}{4}x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + o(x^2).$$

— o — o —