

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 035

Titolo nota

17/11/2010

Sviluppi di composizioni

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(3x) \quad n=6$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)$$

$$\begin{aligned} \text{Al posto di } x \text{ metto } (3x): \quad \sin(3x) &= 3x - \frac{1}{6} \cdot 27x^3 + \frac{1}{120} 3^5 x^5 + o((3x)^6) \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

$$o((3x)^6) = 3^6 x^6 \omega(3x) = x^6 \cdot \boxed{3^6 \omega(3x)} = x^6 \cdot \underbrace{\omega_1(x)}_0 = o(x^6)$$

$$\cos(x^4) \quad n=16$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\text{Metto } x^4 \text{ al posto di } x: \quad \cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{24}x^{16} + o(x^{16})$$

$$\cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{24}x^{16} + o(x^{23})$$

Pensare: chi sarebbe la potenza successiva?

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots, \quad \cos(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{24}x^{16} - \frac{1}{6!}x^{24}$$

tutto il resto è $o(x^{23})$.

Composizioni meno ovvie:

$$\cos(\sin x) \quad n=4$$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

$$\text{Metto } y = \sin x$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o((\sin x)^4)$$

Sostituisco lo sviluppo di $\sin x$ di ordine 4:

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right)^4 + o((\sin x)^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} x^4 \right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \\ &\quad \text{Doppio prodotto} \\ &= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

$$o((\sin x)^4) = (\sin x)^4 \omega(\sin x) = x^4 \frac{(\sin x)^4}{x^4} \omega(\sin x) = o(x^4),$$

$\omega_1(x) \rightarrow 1 - 0 = 0$

Achtung! $\arctan(x+x^4)$ $n=4$

$$\arctan y = y - \frac{1}{3} y^3 + o(y^4); \quad \boxed{\arctan(x+x^4) = x + x^4 + o(x^4)}$$

ASSOLUTAMENTE NO!!!

Ho usato (in fondo) solo $\arctan y = y + o(y)$, quindi

$$\begin{aligned}\arctan(x+x^4) &= (x+x^4) + o(x+x^4) \\ &= x + x^4 + o(x) + o(x^4) \\ &= x + \underbrace{x^4}_{\text{circled}} + o(x) = x + o(x)\end{aligned}$$

Per farlo correttamente devo sostituire $y = x+x^4$ nello sviluppo di $\arctan y$ di ordine 4

$$\begin{aligned}\arctan(x+x^4) &= (x+x^4) - \frac{1}{3} (x+x^4)^3 + o((x+x^4)^4) \\ &= x + x^4 - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$o((x+x^4)^4) = (x+x^4)^4 \omega(x+x^4) = x^4 \frac{(x+x^4)^4}{x^4} \omega(x+x^4) = o(x^4)$$

$\omega_1(x) \rightarrow 1 - 0$

— 0 — 0 —

Con la stessa logica sarebbe stato

$$\arctan(x+x^{20}) = x + x^{20} + o(x^{20}) \quad \text{NO! Al max } \arctan(x+x^{20}) = x + x^{20} + o(x)$$

Achtung!

$$\sin(\cos x)$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^4), \text{ quindi}$$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}(\cos x)^3 + o((\cos x)^4)$$

NO!!!

Non è vero che $o((\cos x)^4) = o(x^4)$!!!

Non funziona la dimostrazione di prima:

$$o(\cos^4 x) = \cos^4 x \cdot w(\cos x) = x^4 \cdot \underbrace{\frac{\cos^4 x}{x^4}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{w(\cos x)}_{\text{non tende a zero perché l'argomento tende a 1.}}$$

Come accorgersene subito?

$\cos(\sin x)$ pongo $y = \sin x$ Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$, quindi uso lo sviluppo di $\cos y$ che vale per $y \rightarrow 0$

$\sin(\cos x)$ pongo $y = \cos x$ Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 1$, quindi non posso usare lo sviluppo di $\sin y$ il quale vale per $y \rightarrow 0$.

Si può usare Taylor per fare limiti per $x \rightarrow +\infty$? NO

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Sostituisco

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

NO!!! lo sviluppo vale per $x \rightarrow 0$, non per $x \rightarrow +\infty$.

Quello che non so è che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$
lo so solo se $x \rightarrow 0$.

In questo caso il limite fa 0 per ordini di infinito.

Non si può usare Taylor perché l'argomento di $\arctan$ non tende a zero.

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(x+1) - \log x] x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$\log(1 + \text{Mostro})$ con $\text{Mostro} \rightarrow 0$

Professionale: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + o(1) = 1$

$\log(1+y) = y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$, quindi $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \rightarrow +\infty$

Più cauto: faccio il cambio di variabili $y = \frac{1}{x}$. Diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \text{ e concludo con limiti notevoli o Taylor a 0.}$$

Esempio 3 Dipende dove tende l'argomento delle funzioni!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} + \frac{o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6}.$$

Alternativa: $x = \frac{1}{n}$ e ...

— 0 — 0 —