

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 034

Titolo nota

17/11/2010

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà di simmetria

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$$

$\sinh x$ è DISPARI

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

$\cosh x$ è PARI

NON sono funzioni periodiche, anzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \quad (\text{è dispari...})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$$

Derivate $(\sinh x)' = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Sviluppi di Taylor

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Facciamo la differenza degli sviluppi, restano solo i termini di grado dispari

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

↑
metto $-x$ al posto di x

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Analogamente $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

Sommando gli sviluppi di $\sinh x$ e $\cosh x$ si ottiene lo sviluppo di e^x .
Questo non sorprende perché

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2}$$

↑
Differenza di quadrati

$$= 2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \cosh x \cdot \sinh x$$

Analogia alla formula di duplicazione di $\sin x$.

Per esercizio: trovare formula di duplicazione del $\cosh$, cioè $\cosh(2x)$.
Scriverla nelle forme simili a

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sinh^2 x = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

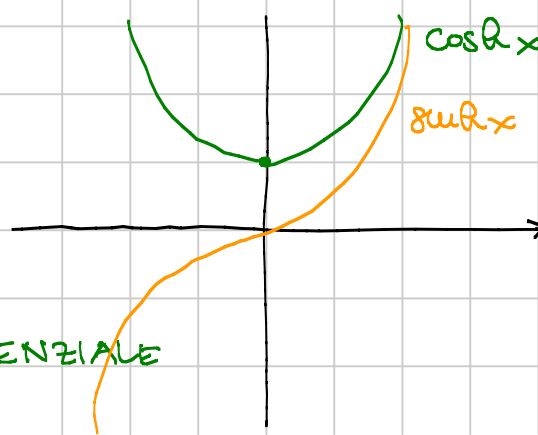
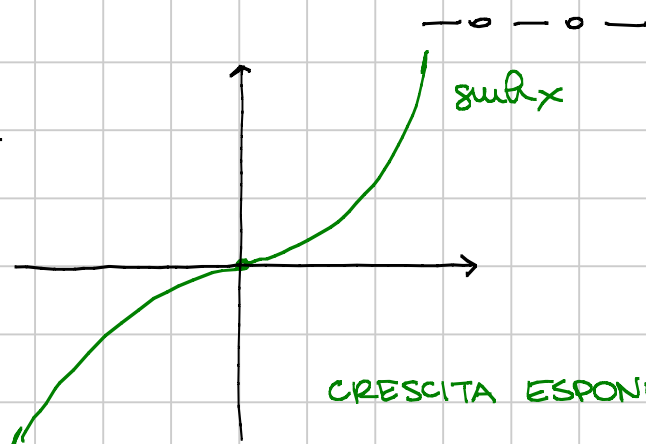
$$\cosh^2 x = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]^2 = \dots = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Quindi

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

N.B.: $x^2 - y^2 = 1$ è
un'iperbole.

Grafici



Osservazione

$\sinh x < \cosh x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (basta sostituire)

Funzioni inverse

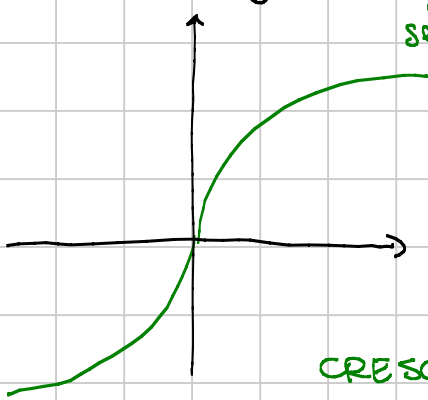
$f(x) = \sinh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile. La funzione inversa è una $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ detta

$$g(x) = \text{settsinh } x$$

$\uparrow$ settone

$f(x) = \cosh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né surgettiva. Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva, quindi invertibile. L'inversa è una $g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ detta

$$g(x) = \text{settcosh } x.$$



CRESCITA LOGARITMICA.

Esistono formule per $\text{settsinh } x$ e $\text{settcosh } x$.

Troviamo la formula per il $\text{settcosh } x$. Scrivo $\cosh x = y$ e punto a ricavare x in funzione di y . Devo risolvere

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y ; e^x + e^{-x} = 2y . \text{ Pongo } A = e^x . \text{ L'eq. diventa}$$

$$A + \frac{1}{A} = 2y , \text{ cioè } A^2 + 1 = 2yA , \text{ cioè } A^2 - 2yA + 1 = 0$$

Calcolo A :

$$A_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Tornando in x ottengo $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$

$\uparrow$ per ipotesi ho che $y \geq 1$, quindi nessun problema con la radice.

Otengo quindi 2 soluzioni

$$x_1 = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$x_2 = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$$

Non c'è problema con l'argomento dei logaritmi perché

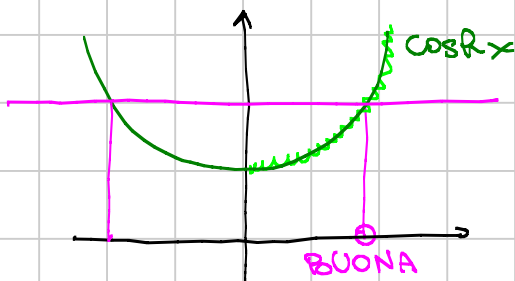
$y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$ abbondantemente e $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$ perché

$y = \sqrt{y^2} > \sqrt{y^2 - 1}$ (tutta roba positiva)

Delle 2 soluzioni, quella buona è la più grande

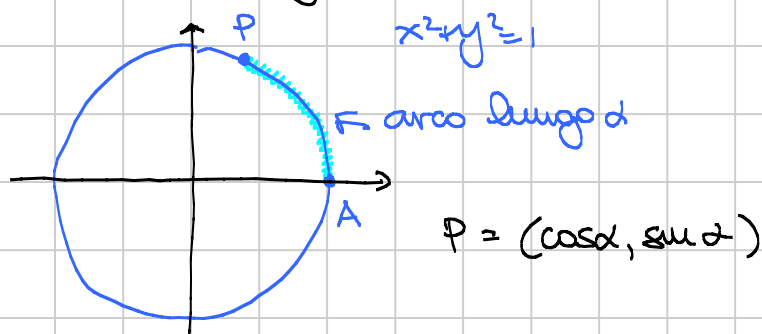
Quindi

$$\operatorname{Sett} \cosh y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

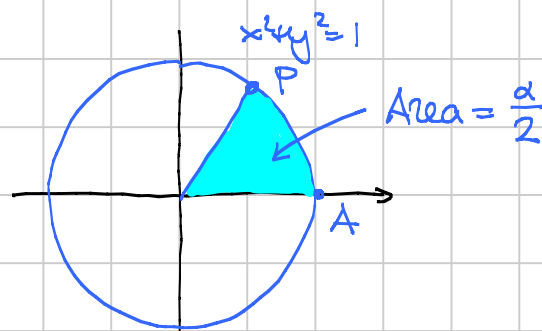


Esercizio Fare gli stessi conti per $\operatorname{settsinh} x$, commentando i vari passaggi di precorso — — —

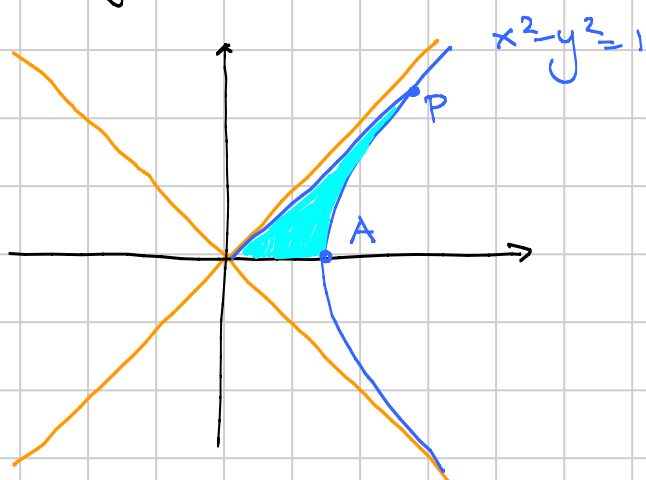
Interpretazione geometrica



trigonometria via arco



trigonometria via settore



Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste un punto P unico sull'iperbole per cui il settore ha area $\frac{\alpha}{2}$.

Tale punto $P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$

Interpretazione fisica. I fili sospesi tra pali (anche di altezza diversa) si dispongono secondo un $\cosh$.