

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 033

Titolo nota

16/11/2010

Esempio 1 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x)$

VERA MA INUTILE il termine in x^3

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^2)$$

$$\sin x = \boxed{x - \frac{1}{6}x^3} + o(x^3)$$

$P_3(x)$

VERA: TAYLOR con $n=3$

$$\sin x = \boxed{x - \frac{1}{6}x^3} + o(x^4)$$

$P_4(x)$

VERA: TAYLOR con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$$

FALSA: ci sarebbe il termine con x^5

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \overset{3!}{x^3} + o(x^3)$$

VERA perché x^3 scompare dentro $o(x^3)$ e ciò che resta è Taylor di ordine 3.

Si possono calcolare i polinomi di Taylor senza calcolare tutte le derivate successive.

Esempio 2 $f(x) = e^x + \cos x$ $n=3$.

Uso i polinomi per e^x e per $\cos x$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Allora

$$\begin{aligned} f(x) = e^x + \cos x &= 1 + x + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + 1 - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + o(x^3) \\ &= 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor della somma o differenza si ottiene facendo somma o diff. dei polinomi di Taylor

Esempio 3 $f(x) = \cos x \cdot \arctan x$ $n = 4$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4), \quad \arctan x = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \arctan x &= \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^3 + o(x^4) \\ &= x - \frac{5}{6} x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x - \cos x \cdot \arctan x - 2}{\sin x - x}$

Dagli esempi precedenti sappiamo che

$$e^x + \cos x = 2 + x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\cos x \cdot \arctan x = x - \frac{5}{6} x^3 + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \text{Numeratore} &= 2 + \cancel{x} + \frac{1}{6} x^3 - \cancel{x} + \frac{5}{6} x^3 - 2 + o(x^4) + o(x^3) \\ &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\text{Denominatore} = \sin x - x = \cancel{x} - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) - \cancel{x} = -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{\text{Numeratore}}{\text{Denominatore}} = \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3} \left(1 + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\cancel{x^3} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)} \rightarrow -6.$$

Osservazioni: lo "scontro finale" è avvenuto all'ordine 3.

"Un limite si può fare con i limiti notevoli se e solo se lo scontro è di ordine 1."

Se lo scontro finale è di ordine k , servirebbero k passaggi di Hôpital.

Esempio 5

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{e^x - 1 - \sin x}{\log(1+x) - \arctan x}$$

Provo a fermarmi all'ordine 1: $e^x = 1 + x + o(x)$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\text{Numeratore: } e^x - 1 - \sin x = \cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} + o(x) = o(x)$$

$$\text{Denominatore: } \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} = o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH} \quad (\text{Chi si ferma troppo presto ottiene BOH})$$

Provo a fermarmi all'ordine 3: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Numeratore: } \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \cancel{1} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Denominatore: } \cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2 \cdot x} \right)}{\cancel{x^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2 \cdot x} \right)} \rightarrow -1$$

Chi si ferma troppo tardi fa tanti conti per nulla.

Esempio 6

$$f(x) = e^{\sin x}$$

$$n = 4.$$

Penso di porre $y = \sin x$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

$$\text{quindi } e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{1}{24}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$$

Ora al posto di $\sin x$ sostituisco il suo sviluppo di ordine 4.

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o(\sin^4 x) \\ &= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

↑
Doppio prodotto
tra x e $-\frac{1}{6}x^3$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

È lecito dire che $o(\sin^4 x) = o(x^4)$?

$$o(\sin^4 x) = \sin^4 x \cdot \omega(\sin x) = x^4 \frac{\sin^4 x}{x^4} \omega(\sin x) = o(x^4)$$

$\omega(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$

Altro modo più raffinato di vederlo: $\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$, quindi

$$\begin{aligned} o(\sin^4 x) &= o(x^4 + o(x^4)) = o(x^4) + o(o(x^4)) \\ &= o(x^4) + o(x^4) \\ &= o(x^4) \end{aligned}$$

Giustificare e capire i passaggi !!!