

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 032

Titolo nota

16/11/2010

Formula di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione. Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora sotto certe ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \overset{\text{resto}}{O(x^n)} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO (il resto è o piccolo)

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Formula per i polinomi di Taylor.

Polinomi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Osservazione

Funzione dispari = solo potenze dispari

Funzione pari = solo potenze pari

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

(come il binomio di Newton, solo con α reale qualunque e non solo intero). Se α è intero positivo, i coefficienti diventano uguali a zero dopo un po'.

Casi particolari: $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots$$

Esercizio: provare il caso $\alpha = \frac{1}{2}$, cioè $\sqrt{1+x}$.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3}{x^3}$

Guardando il denominatore
uso Taylor di ordine $n=3$

$$\sin x = P_3(x) + o(x^3) = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$x^5 = o(x^3)$$

Sostituisco lo sviluppo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) - \cancel{x} + \boxed{x^5}}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{x^2} - 1)}{\arctan x - \sin x}$

Mi fido con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Denominatore} = \arctan x - \sin x = \cancel{x} - \frac{1}{3} x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{x(e^{x^2} - 1)}{\arctan x - \sin x} = \frac{\cancel{x}(e^{x^2} - 1)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} \rightarrow -6.$$

Verifica degli sviluppi delle funzioni elementari

$$f(x) = e^x$$

Calcolo le derivate successive $f^{(k)}(x) = e^x$,
quindi $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

Quindi il termine k -esimo dello sviluppo è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{k!} x^k$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$\vdots$

$$\dots f^{(2010)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

Quando vado a calcolare per $x=0$ trovo

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

Quindi il coefficiente di x^k nello sviluppo sarà $\frac{1}{k!}$ moltiplicato per 0 se k è pari e per ± 1 alternato se k è dispari

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{0}{6!} x^6 + \frac{(-1)}{7!} x^7 + \dots$$

$\quad \quad \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0}$

$$f(x) = \cos x$$

$$f^{(0)}(x) = \cos x$$

e così via.

$$f^{(1)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(2)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x$$

Quando metto $x=0$ trovo la successione
cioè 0 sui dispari e ± 1 alternati sui pari.

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$$

$\quad \quad \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0}$

$$f(x) = \log(1+x)$$

Devo trovare una formula per la derivata k -esima.

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

In generale sembra venire

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Data per buona la formula, avremo che il termine k -esimo del polinomio è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} x^k = \frac{(-1)^{k+1} \cancel{(k-1)!}}{k \cancel{(k-1)!}} x^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Come si dimostra la formula per la derivata k -esima?

INDUZIONE !!!

Passo base $k=1$: facile verifica

Passo induttivo : Ipotesi: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

$$\begin{aligned} \text{Derivo: } f^{(k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} (k-1)! (-k) \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \\ &= (-1)^{k+2} k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \end{aligned}$$

e questa è esattamente la tesi del passo induttivo, cioè la stessa formula con $(k+1)$ al posto di k .